Vol. 13, No. 1, Spring 2024, pp 229- 245

Journal of Educational and Scholastic studies

ORIGINAL RESEARCH PAPER

The investigation of Teachers and Student Teachers' Selected Strategies at Solving Four Semantic Types of Direct Proportional Problems

Afsaneh Poorang [1], *Nasim Asghari*[*2], *Asghar Shahvarani* [3], *Masoud Kabiri* [4]

[1] *PhD student in Math Education at Islamic Āzād University (Central Tehran Branch), Tehran, Iran.*
[2] *PhD, Islamic Āzād University (Central Tehran Branch), Tehran, Iran.*
[3] *PhD, Islamic Āzād University (Science and Research Branch), Tehran. Iran.*
[4] *PhD, Organization for Educational Research and Planning (Research Institute for Education), Data Manager of TIMSS and PIRLS of Iran, Tehran, Iran.*

Keywords:
Proportional Reasoning
Semantic Type
Direct Proportionality Problems

1 .Corresponding author
nas. asghari@iauctb.ac.ir

Received: 2021/11/27
Reviewed: 2022/11/05
Accepted: 2022/08/14

ABSTRACT

Background and Objectives: The ability of teachers to develop proportional reasoning among learners depends on various factors, including problem-solving behavior, problem-solving teaching method, and the quality of the dissemination of reasoning on their part. Using appropriate strategies in solving proportionality problems is one of the means for developing proportionality reasoning. **Methods:** The present study aimed to consider the strategies selected by teachers and student teachers in activity of solving direct proportionality problems, to investigate the effectiveness of these strategies from the four semantic types of problems in this field. The sample included 180 elementary school teachers, first-secondary teachers and student teachers who participated in the study voluntarily. The research test contained 12 tasks including direct proportional problems (missing value and comparison). **Findings:** The results showed significant relationships among all three independent groups of participants in terms of frequency of use of strategies leading to correct solutions in four semantic types of the problems; but regarding the selection of proportional reasoning strategies, among the participating groups, the performance of elementary school teachers was independent of the semantic type of the problems. The frequency of use of proportional reasoning strategies by elementary teachers in combination with semantic types significantly outperformed the other two groups. There was no significant difference between the performance of first-secondary teachers and student teachers in this regard. **Conclusion:** Development of reflective thinking and sensitivity to the nature of problem-solving strategies among teachers help learners to develop more complex forms of this reasoning. Concerning the training of prospective teachers, raising awareness of the consequences of the indiscriminate use of proportional algorithms is emphasized.

ISSN (Online): 2645-8098 **DOI: 10.48310/PMA.2024.3523**

Citation (APA): Poorang, A., Asghari, N., Shahvarani semnani, A., & Kabiri, M. (2024). Evaluation of Teachers' Problem Solving Strategies Impressionability by the Semantic Types of proportional problems. *Educational and Scholastic studies*, 13 (1), 229 - 245 .
https://doi.org/10.48310/PMA.2024.3523

بررسی انتخاب استراتژی حل مسدله در فعالیت آموزشی معلمان و دانشجومعلمان در چهار گونه معنایی از مسائل کلامی تناسب مستقیم

مقاله پژوهشی/ مروری

افسانه پورنگ[۱]، نسیم اصغری[*۲]، احمد شاهورانی سمنانی[۳]، مسعود کبیری[۴]

۱. دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

۲. استادیارگروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

۳. استادگروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

۴. استادیار پژوهشگاه مطالعات آموز ش وپرورش، تهران، ایران.

چکیده

پیشینه و اهداف: توانمندی معلمان به منظور توسعه استدلال تناسبی نزد فراگیران، وابسته به عوامل مختلف از جمله رفتار طرح مسئله، شیوه تدریس حل مسئله و کیفیت اشاعه استدلال از سوی آنان است. استفاده از استراتژی‌های مناسب در پرداختن به حل مسائل تناسب، از جمله ابزارهای توسعه استدلال تناسبی است. هدف پژوهش حاضر مطالعه استراتژی‌های انتخابی معلمان و دانشجومعلمان، در فعالیت تدریس حل مسائل تناسب مستقیم، به منظور بررسی میزان تأثیرپذیری این استراتژی‌ها از چهار گونه معنایی مسائل این حوزه بود. **روش‌ها:** مطالعه، توصیفی از نوع زمینه‌یابی بود. نمونه آماری در دسترس، شامل ۱۸۰ نفر از معلمان دوره دوم دبستان، متوسطه اول (ریاضی) و دانشجومعلمان شهر تهران بودند. ابزار پژوهش، آزمون محقق ساخته، شامل دوازده مسئله کلامی تناسب نوع مستقیم بود. روایی محتوای آزمون از سوی اساتیدی از حوزه روانسنجی-آزمون‌سازی و آموزش ریاضی مورد تأیید قرار گرفت. **یافته‌ها:** نتایج در مورد هر سه گروه مستقل شرکت‌کننده، روابط معناداری را در میزان به‌کارگیری استراتژی‌های منجر به حل صحیح در چهار گونه معنایی از مسائل این حوزه نشان داد؛ لیکن در خصوص انتخاب استراتژی‌های استدلال تناسبی، در میان گروه‌های مشارکت‌کننده، عملکرد معلمان دوره ابتدایی مستقل از نوع گونه معنایی مسائل بود. میزان به‌کارگیری استراتژی‌های استدلال تناسبی از سوی معلمان ابتدایی در ترکیب گونه‌های معنایی، با اختلاف معنادار، بهتر از عملکرد دو گروه دیگر بود. بین عملکرد معلمان متوسطه اول و دانشجومعلمان، در این خصوص اختلاف معناداری وجود نداشت. **نتیجه‌گیری:** توسعه تفکر تأملی معلمان و حساس‌بودن به ماهیت استراتژی‌ها در فعالیت آموزشی حل مسائل این محتوا منجر به سوق فراگیران در مسیر توسعه فرم‌های پیچیده‌تر این استدلال می‌شود. در خصوص آموزش معلمان آینده، آگاهی بخشی نسبت به پیامد به‌کارگیری بی‌رویه الگوریتم‌های تناسبی مورد تأکید است.

از دستگاه خود برای اسکن و خواندن مقاله به صورت آنلاین استفاده کنید.

واژه‌های کلیدی:
استدلال تناسبی
گونه معنایی
مسائل تناسب مستقیم

۱. نویسنده مسئول
nas. asghari@iauctb.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۹/۰۶
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۰۸/۱۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۲۳
شماره صفحات: ۲۴۵- ۲۲۹

شاپا الکترونیکی: ۸۰۹۸-۲۶۴۵

DOI: 10.48310/PMA.2024.3523

COPYRIGHTS
©2024 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.

مقدمه

استدلال تناسبی، پیش‌درآمد تفکر تابعی و ابزاری قدرتمند در جهت توسعه تفکر جبری است و مستلزم شناخت و متعاقب آن درک دانش‌آموزان از رابطه تابعی میان فضاهای اندازه است. مفهوم تناسب و استلزام‌های توسعه تفکر تناسبی، از جمله توانایی بازشناسی و تشخیص شباهت ساختاری و مقایسه‌های ضربی توصیف شده در فرایند استدلال تناسبی، به لحاظ شناختی، پیچیده و تدریس آن نیازمند رویکردهای مفهوم‌مدار است. در این رابطه، انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا[1] با اشاره به ریشه‌های توسعه استدلال تناسبی در تکالیف ضرب و تقسیم پایه‌های دوم و سوم دبستان، نظیر مسائلی که در آن‌ها نرخ واحد[2] به‌کار گرفته می‌شود (مثال: یک سیب پنج ریال ارزش داشته باشد، دو سیب چند ریال ارزش دارد؟) و نیز مسائل کلامی شامل کسرهای معادل[3] و مقایسه‌های کسری[4] که می‌توانند به‌عنوان موقعیت‌های «نسبت و تناسب» لحاظ شوند، مفهوم تناسب را از اهمیت بسیار برخوردار می‌داند و تصریح می‌کند ارزشمند است هر چه زمان و تلاش در جهت تضمین توسعه دقیق آن صرف شود (NCTM, 1989).

رویکردها و استراتژی‌هایی که در آن‌ها اقدام به تحلیل روابط، میان کمیت‌های موجود در موقعیت و زمینه مسئله می‌شود، استدلال کمی یا رسمی تناسبی نام دارد. استدلال تناسبی شبکه‌ای از مفاهیم و روابط را شامل می‌شود و نقطه عطفی در توسعه شناختی دانش‌آموزان به شمار می‌آید (المان[5]، ۲۰۰۷). پرورش این توانمندی وابسته به رفتار حل مسئله معلمان، رویکرد استدلالی آنان و اشاعه آن است. از سوی دیگر، غالب رویکردهای آموزشی، تدریس ریاضیات را با طرح مسئله مبتنی بر موقعیت‌های واقعی توصیه می‌کنند. در حوزه تناسب، استدلال مبتنی بر زمینه مسئله نیز مورد تأکید رویکردهای آموزشی است. مستقل از پژوهش‌ها در ارتباط با استدلال تناسبی دانش‌آموزان، سهم کوچکی از مطالعات به بررسی کیفیت دانش این حوزه نزد معلمان و شیوه کارکرد آن‌ها اختصاص یافته است. مطالعات اندکی که با هدف بررسی ساختار درک معلمان از مراتب استدلال تناسبی و سهم ایشان در میزان توسعه آن صورت گرفته است. در این خصوص می‌توان به چند مطالعه (Hines & McMahon, 2005; Lim, 2009; Son, 2013; Riley, 2010; Ruiz Ledesma, 2011; Pearce at al, 2013; Nagar et al, 2015) اشاره کرد که حاکی از وجود مشکلاتی در این خصوص هستند. در این میان، پژوهش‌هایی با هدف توسعه تفکر تناسبی نزد فراگیران، در پی فراهم ساختن رهنمودهایی برای معلمان، نظام آموزش و یاددهی بوده‌اند (Lamon, 2007; Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2012; Howe et al, 2011; Howe et al, 2015) که به تدوین ابتکارهای تعلیمی در جهت بهبود کیفیت توسعه استدلال تناسبی پرداخته‌اند.

در عین حال، در کشور ایران، مطالعه‌ای درخصوص دانش محتوا و پداگوژی محتوا در حوزه استدلال تناسبی در میان معلمان و دانشجومعلمان صورت نگرفته است. این امر شامل بررسی کیفیت مفهوم‌پردازی روابط بین کمیت‌ها در مسائل نسبت و نیز گستره زمینه‌پردازی از سوی آنان در تدریس حل مسائل تناسبی می‌باشد. مطالعه‌ای از سوی محققان این پژوهش، در پاسخ به این پرسش شکل گرفت که فعالیت پداگوژیکی حل مسئله معلمان و دانشجومعلمان در خصوص محتوای تناسب، تا چه اندازه از منابع مفهومی لازم به جهت حمایت از توسعه استدلال تناسبی دانش‌آموزان، برخوردار است. پژوهش حاضر به ارائه بخشی از نتایج این مطالعه در بررسی ابعادی از دانش محتوا و نیز ماهیت استراتژی‌های انتخابی، در فعالیت آموزش حل مسائل کلامی تناسب مستقیم، با تمرکز بر چهار گونه معنایی از مسائل این حوزه، در بین مشارکت‌کنندگان پرداخته است.

استراتژی‌های حل یک مسئله تناسبی گستره‌ای از تدابیر مفهومی، رویه‌ها، و بازنمایی‌ها را عرضه می‌کنند. ملاحظه تفکر پداگوژی معلمان در حل مسائل تناسبی، بحث بر سر موانع به‌کارگیری استدلال تناسبی را در گونه‌های معنایی

1. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
2. Unit-rate
3. Equivalent fractions
4. Fraction comparisons
5. Aleman

متفاوت فراهم می‌سازد. تفسیر این رفتارهای مشترک معلمان می‌تواند رسیدگی به دشواری‌های دانش‌آموزان را تسریع کند. از این رو، عملکرد مشارکت‌کنندگان این پژوهش، در انتخاب استراتژی‌های منجر به حل صحیح و نیز استراتژی‌های استدلال تناسبی، به‌عنوان متغیرهای فرایندی، در چهار گونه معنایی از مسائل کلامی تناسبی، (نوع مقدار مجهول[۱] و مقایسه‌ای[۲]) مورد بررسی قرار گرفت.

سؤال کلی زیر این پژوهش را هدایت می‌کند.

عملکرد معلمان و دانشجومعلمان در به‌کارگیری استراتژی‌های حل مسائل تناسب مستقیم در چهار گونه معنایی از مسائل کلامی این حوزه چگونه است؟

پیشینه پژوهش

استدلال تناسبی: استلزامات توسعه

نسبت و تناسب موضوعاتی محوری در آموزش دبستان و ریاضیات دوره متوسطه است (Son, 2013). جوهره استدلال تناسبی، فرایند مقایسه یک مقدار نسبی با دیگری است (Pitta-Pantazi & Christou, 2011). توانایی برای شناسایی شباهت‌های ساختاری و یکسان دانستن مقایسه‌های ضربی توصیف شده در فرایند استدلال تناسبی، سنگ بنای جبر و ریاضیات پیشرو است (Ruiz Ledesma, 2011). همسو با این محقق، این استدلال از سوی محققانی دیگر (Parish, 2010; Lamon, 1999) با تعابیری نظیر ستون فقرات، سنگ طاق[۳] حساب دبستان، سنگ بنای[۴] هر آنچه از پی می‌آید و دروازه سطوح بالاتر موفقیت در ریاضیات نام برده شده است و به اعتقاد آنان یک موقعیت محوری و اساسی را در برنامه‌های ریاضیات مدرسه اشغال می‌کند. استدلال با نسبت‌ها، با یادگیری پرداختن به دو کمیت به‌طور هم‌زمان، آغاز می‌شود. در این میان، تناسب، رابطه تساوی بین دو نسبت است که توانایی ایجاد مفهوم این تساوی، یکی از مشخصه‌های اصلی استدلال تناسبی است (NCTM, 2013). توسعه این استدلال در حوزه تفکر تابعی، قرار دارد و لزوماً نتیجه طبیعی رشد شناختی نیست؛ بلکه مستلزم آموزش و فراهم ساختن موقعیت‌های آموزشی مناسب است (Radford, 2011). اندازه‌گیری توسعه استدلال تناسبی دشوار است، زیرا رشد درک در بین همه انواع مسائل این حوزه لزوماً خطی به نظر نمی‌رسد و در واقع، همه مسائل «نسبت» توسط استراتژی پیچیده‌تر به کارآمدترین شکل حل نمی‌شوند (Parish, 2010). در این رابطه، واژگان فنی[۵] و نمادپردازی‌های[۶] ریاضیاتی می‌توانند یا به‌عنوان مسیرهایی[۷] برای دانش‌آموزان هنگام توسعه درکشان و یا به‌عنوان موانعی برای این رشد عمل کنند. این واژگان و نمادپردازی‌های مورد استفاده در یک کلاس درس، به خصوص برای مفاهیم مرتبط با نسبت و کسر، به‌عنوان عواملی مهم و اساسی در تعیین ابعاد «شناخت در زمینه» معرفی می‌شوند (Clark, Berenson & Cavey, 2003). از این‌رو، دانش شناختی می‌تواند زمان و ماهیت معرفی مفاهیم تابعی را روشن سازد و شیوه‌های متفاوت در تدریس برای ساختارهای عددی و زمینه‌های متفاوت مسائل این حوزه را تبیین کند. به ویژه آنکه پژوهش‌ها نشان داده تجارب (در ارتقای دانش موضوعی معلمان) به تنهایی برای تدریس ریاضیات از پیش دبستان تا پایان دبیرستان، به منظور درک [مفهوم‌پردازی] کافی نیستند (Lobato et al, 2011).

1. Missing Value problem
2. Comparison
3. Capstone
4. Cornerstone
5 Terminology
6. Notational
7. Pathways

مراتب توسعه استدلال تناسبی

پیاژه و اینهلدر (Piaget & Inhelder) توسعه استدلال تناسبی را یک دستاورد تکاملی متأخر معرفی می‌کنند و توسعه آن را یک نقطه تحول در مسیر توسعه استدلال‌های نظم بالاتر[1] می‌شمارند؛ آن‌ها اظهار می‌کنند که مشخصه ذاتی استدلال تناسبی این است که بایستی یک رابطه بین دو رابطه ایجاد شود و این توانایی مستلزم ساختارهای ذهنی پیشروتر از ضرب و تقسیم ساده است (Pitta-Pantazi & Christou, 2011).

استدلال تناسبی با یک درک کیفی از کمیت (نظیر کمتر و بیشتر) شروع می‌شود و به درکی کامل از تناسب به‌عنوان رابطه‌ای ثابت بین زوج کمیت‌های متغیر منتهی می‌شود؛ کلید این تغییرات، انتقال از استدلال جمعی به استدلال ضربی و از به‌کارگیری استراتژی‌های زمینه‌مدار به درکی تعمیم یافته از توابع است (Tourniaire & Pulos, 1985). در روند توسعه استدلال تناسبی، مراتب استدلال پیش‌تناسبی[2] و استدلال تناسبی کمی قرار دارند. استدلال کمی در تقابل با صرفاً متکی بودن به استفاده از ویژگی‌های ریاضیاتی، در خلال یک «استدلال ساختاری ریاضیاتی»، تمیز کمیت‌ها و روابط میان آن‌ها در موقعیت مفروض، خلق کمیت‌های جدید و استنتاج با آن‌ها در نظر گرفته می‌شود (Lobato et al, 2011). در این خصوص کمیت، به‌عنوان موجودیت قابل اندازه‌گیری، تصور فرد از ویژگی اشیا، رویداد یا موقعیت‌ها، معرفی می‌شود. روند انجام استدلال کمی، مشتمل بر استراتژی‌هایی نظام‌مند است که در آن‌ها نمادهای جبری[3] همراه با درک روابط عددی و تابعی در بازنمایی‌هایی از نسبت‌ها به کار می‌رود و این متمایز از صرفا متکی بودن به استفاده از ویژگی‌های ریاضیاتی در خلال یک استدلال ساختاری ریاضیاتی می‌باشد. سبک‌های این استدلال از نقطه‌نظر تفاوت بین استدلال عددی و استدلال تابعی به دو دسته تقسیم می‌شوند؛ در تمییز بین استدلال عددی (یا اسکالری) و استدلال تابعی، استدلال عددی در ارتباط با تبدیلات درون یک متغیر و استدلال تابعی ایجاد روابط بین متغیرها شمرده می‌شود و تمایز بین این دو نوع از روابط مهم است زیرا هر یک درگیر در فرایندهای شناختی مجزا و متفاوتی هستند (Silvestre & da Ponte, 2012).

مشکلات مسیر توسعه استدلال تناسبی

توسعه ظرفیت دانش‌آموزان در انجام استدلال تناسبی، در گرو تدریس مفاهیم و مهار مسیر تند محاسبات است (NCTM, 2013). این در حالی است که پژوهش‌ها در بررسی رابطه بین دانش معلمان و عملکرد تدریس آن‌ها گزارش می‌کنند که حتی معلمان با دانش قوی ریاضیات اغلب مشکلات خیلی بیشتری در تبیین یک رویکرد مفهوم‌گرا دارند (Son, 2013). از سوی دیگر، دانش موضوعی ناکافی و نامناسب به جای درکی مفهومی، می‌تواند منجر به سازگار شدن و انطباق استراتژی‌های تدریس برای خبرگی رویه‌ای شود (Hill & Ball, 2011Charalambos,)؛ کما این که فراگیران نیز در تقلید رویه‌ها، فارغ از درک روند آن، ماهر هستند (NCTM, 2013).

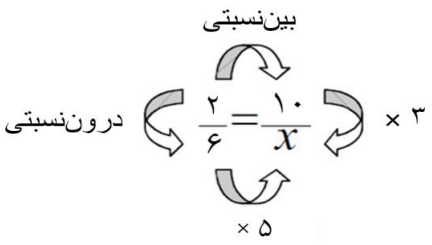
پژوهش‌ها حاکی از آن هستند که به‌کارگیری الگوریتم‌های تناسبی از سوی معلمان، در فعالیت‌های آموزشی، بیشتر ترجیح داده می‌شود؛ در نتیجه این روند، دانش‌آموزان یک تفکر تناسبی کمی به شیوه‌ای مکانیکی را فارغ از پیمودن سلسله مراتب تفکر تناسبی، توسعه می‌دهند؛ از این‌رو توالی توسعه کیفی-کمی استدلال تناسبی، همواره نزد فراگیران وجود ندارد (Ruiz Ledesma, 2011). هاو و همکارانش (Howe et al, 2015) با طرح این ایده که کیفیت توسعه استدلال تناسبی با میزان تسلط بر اعداد گویا ارتباط متقابل دارند، با تدوین ماژول‌های در ارتباط با آموزش اعداد گویا و همکاری پژوهشگرانی در کشورهای مختلف، با اجرای پروژه بهبود اصولی و تأثیرگذار در آموزش، به اصلاح شیوه‌های تدریس معلمان و بررسی نتایج در ارتباط با کیفیت توسعه استدلال تناسبی پرداخته‌اند. این همکاری‌ها در جریان است.

1. Higher order reasoning
2. Preproportional
3. Algebraic symbols

استراتژی‌های حل مسائل تناسبی

موقعیت‌های تناسبی به دلیل ارتباط با ضرب و تقسیم، توسط ورگناد (۱۹۸۸) در حوزه مفهومی ساختارهای ضربی، تجزیه و تحلیل و منجر به تمییز دو استراتژی استدلالی (عددی-تابعی) برای حل موقعیت‌های تناسب مستقیم از سوی وی شده است؛ عملگر اسکالر در خلال یک اندازه[۱] و عملگر تابعی فیمابین دو اندازه[۲] و این به معنای درک روابط ضربی و تمییز آن‌ها از روابط جمعی است. در این بین، ساختار عددی، به نوع رابطه ضربی (صحیح-غیرصحیح) بین کمیت‌ها درون یک نسبت و نیز بین کمیت‌های نظیر از دو نسبت اشاره دارد. از دیگر استراتژی‌های استدلال تناسبی تابعی، کسب نرخ واحد یا واحدپردازی[۳] است. به دست آوردن ارزش واحد، یک استراتژی استدلالی تناسبی است. واحدپردازی فرایندی شناختی است؛ قطعه‌بندی مجدد ذهنی یک کمیت مفروض به تکه‌های اندازه خورده آشنا، قابل مدیریت، مناسب و راحت، به منظور انجام عملیات با کمیت مفروض (Lamon, 1996). استدلال تناسبی تابعی ضریب مقیاس[۴] نیز به تشخیص عامل (ضریب) اسکالر کسری و ضرب در این عامل اشاره می‌کند. درک جامعی از کسرها و نسبت و تناسب در این استراتژی به هم پیوند خورده است. سن و گولر (Sen & Guler, 2017) تأثیر مثبت تدریس انواع استراتژی‌ها در حل مسائل تناسبی را در ارتقاء سطح مهارت‌های استدلال تناسبی فراگیران پایه ششم گزارش می‌کنند.

در این بین، به‌کارگیری جدول نسبت خود یک استراتژی آموزشی تلقی می‌شود. آموزش ریاضیات واقع‌گرایانه[۵] جدول تناسب را به‌عنوان ابزاری برای ارتقاء درک فراگیران از نسبت و تناسب پذیرفته است. این ابزار تجربیاتی برای دانش‌آموز فراهم می‌آورد که فهمی قوی از نسبت و تناسب را می‌توان به واسطه آن بنا نمود. تبدیل افقی در این جدول متناظر با روش اسکالر به‌کارگیری نسبت و تبدیل عمودی یک رویکرد تابعی است (شکل ۱). به بیان دیگر، رابطه ضرب بین‌نسبتی[۶] به رابطه ضربی بین بخش‌های نظیر از نسبت‌های متفاوت اشاره دارد در حالی که رابطه ضرب درون‌نسبتی[۷] به رابطه ضربی بین اِلمان‌ها [کمیت‌ها] در یک نسبت اشاره دارد.



شکل ۱. استراتژی ضربی درون‌نسبتی (استدلال تناسبی تابعی)- بین‌نسبتی (استدلال تناسبی عددی)
(Artut & Pelen, 2015).

از سوی دیگر، به‌کارگیری الگوریتم‌های تناسبی در دسترس‌ترین شیوه پاسخ‌دهی را فراهم می‌سازند اما شکاف در پیوند رویه‌ها و دانش مفهومی در حوزه نسبت و تناسب منجر به تاخیر توسعه تفکر تناسبی در فراگیران می‌گردد. استفاده از رویه‌های مکانیکی نظیر الگوریتم ضرب‌های ضربدری[۸] برای استدلال با جدول نسبت، هماهنگ نیست؛ زیرا برخلاف روش‌های دیگر، شیوه استدلال تناسبی را روشن نمی‌کند. رویه به‌کارگیری «قاعده سه[۹]» نیز بدون تخصیص

1. The scalar operator within the same magnitude
2. The functional between the two magnitudes
3. Unitizing
4. Scale factor
5. The Realistic Math Education
6. Between ratio multiplicative relationship
7. Within ratio multiplicative relationship
8. Cross Multiplication
9. The Rule of Three: The cross product and divide algorithm

معنا و صرفاً شیوه‌ای مکانیکی و همان الگوریتم ضرب متقابل و تقسیم، بدون استفاده از کسرها و جدول نسبت است. این رویه نیز شیوه استدلال تناسبی را روشن نمی‌کند؛ بنابراین یک فن محسوب می‌شود (Lim, 2009). رویه رصد شده دیگر در حل مسائل تناسبی، جستجوی پاسخ نهایی مسئله با نوشتن «معادله جبری» فارغ از هر بازنمایی مرتبط با نمادپرازی نسبت است.

مسائل کلامی تناسبی؛ گونه‌های معنایی

در اشاره به نظریه ریاضیات در خلال زمینه علوم، یادآور می‌شود که ریاضیات در هر سطح آموزشی بایستی به واسطه رویدادهای زمینه‌ای به دانش‌آموز ارائه شود؛ در این راستا، کیفیت توسعه تفکر تناسبی نیز وابسته به مواجهه دانش‌آموز و درک او از شرایط روزمره‌ای است که با مفهوم تناسب پیوند دارد (Ruiz Ledesma, 2011). ورگناد (۱۹۸۸) تصریح می‌کند «مشکلات فراگیران بیش از آن که به خاطر ماهیت ساختار ضربی این استدلال باشد، به دلیل زمینه به‌کارگیری است». در این ارتباط، ناگار و همکارانش (Nagar et al, 2015) اظهار می‌کنند در فراخوانی منابع دانشی معلمان در خصوص نسبت و کسرها، جنبه‌های پراهمیت یک درک مستحکم مشاهده نمی‌شود. آنها معتقدند «زمینه[1]» در تخصیص منابع دانش در این حوزه پراهمیت است و در ایجاد ارتباط دانش در این حوزه دارای نقشی اساسی است. ارتیز (Ortiz, 2015) با اشاره به شکاف در درک مفاهیم نسبت و تناسب درسطح مدارس ابتدایی در پایه‌های سوم، چهارم و پنجم، نقصان‌ها را وابسته به زمینه مسئله می‌خواند و علت آن را وجود شکاف تحقیقاتی در رابطه با مؤثرترین شیوه‌ها برای تدریس استدلال تناسبی برمی‌شمارد.

تأثیری که «زمینه مسئله» در روند توسعه استدلال تناسبی ایجاد می‌کند، اطلاعاتی در مورد برهم کنش احتمالی زمینه و این روند فراهم می‌سازد. لامون (Lamon, 1993) در خلال زیرسازه نسبت، در ارتباط با زمینه مسائل کلامی حوزه تناسب، چهار گونه را که به لحاظ معنایی[2] از هم مجزا هستند تمییز می‌دهد. وی با طرح این ادعا که استدلال فراگیران در حل مسائل تناسبی، متاثر از نوع گونه معنایی است، یک چارچوب برای طبقه‌بندی مسائل تناسبی ایجاد کرد. او در مطالعه دریافت که هر یک از این ساختارهای زمینه‌ای، سطوح مهارتی متفاوتی از استراتژی‌های حل را در فراگیران بر می‌انگیزند (Lamon, 1993). این گونه‌ها شامل موارد «مجموعه‌های مرتبط[3]»، موقعیت‌های «جزءجزءکل[4]»، «اندازه‌های خوب قطعه‌بندی شده[5]» و گونه «انبساط و انقباض‌ها[6]» (یا مقیاس‌سازی[7]) است (Lamon, 1993). گونه معنایی «مجموعه‌های مرتبط» اشاره به زمینه‌ای است که رابطه بین دو مؤلفه، صرفا در خلال موقعیت مسئله تعریف می‌شود و با اشاره چند عبارت صریح در مسئله، جفت‌هایی از متغیرهای فشرده شکل می‌گیرد. نمونه آن را می‌توان در مثال مقایسه سهم پیتزای دخترها و پسرها مشاهده کرد: در تسهیم هفت پیتزا به سه دختر و یک پیتزا به سه پسر، کدامیک مقدار بیشتری دریافت می‌کنند. گونه «جزءجزءکل» اشاره به موقعیتی است که کل برحسب دو قسمت (یا بیشتر) از آنچه از آن‌ها تشکیل شده توصیف می‌شود. مثالی روشن را می‌توان در ترکیب دو رنگ و ساختن رنگ جدید یافت. این موقعیت‌ها، تفسیر و درک زبان رایج نسبت را می‌سنجند؛ لازم به ذکر است این امر پیش درآمد استفاده از توصیف جبری است. گونه معنایی «اندازه‌های خوب قطعه‌بندی شده» در ارتباط با مقایسه دو اندازه (کمیت) بسیط است که منجر به یک اندازه یا کمیت فراگیر یا همان نرخ می‌شود. نظیر معرفی کمیت سرعت که در نسبت مسافت به زمان طی شده می‌توان آن را به‌کار برد و در نهایت گونه «انبساط و انقباض‌ها» که شامل مسائل تشابهات فضایی است؛

1. Context
2. Semantically
3. Associated Sets
4. Part-Part-Whole
5. Well Chunked Measures
6. Stretchers and Shrinkers [stretched or shrunk]
7. Scaling Problems

مسائلی که در آن‌ها نسبت دو اندازه وقتی یک شکل بزرگ یا فشرده می‌شود، حفظ یا به عبارتی ثابت نگاه داشته می‌شود. سان (Son, 2013) به بررسی نگرش و پاسخ دانشجومعلمان در خصوص خطاهای فراگیران در گونه معنایی اخیر پرداخته است. وی اظهار می کند بیشتر دانشجومعلمان تمایل دارند مداخله خود را در ارتباط با خطاهای دانش‌آموزی، مبتنی بر جنبه‌های رویه‌ای ارائه کنند. لامون (Lamon, 1993) در ارائه نتایج پژوهشی خود اظهار می‌کند ماهیتی متمایز، مشخص و متفاوت برای استراتژی‌های دانش‌آموزان در ارتباط با هر یک از گونه‌های معنایی وجود دارد؛ این استراتژی‌ها تا حدودی توسط خصوصیت‌های فردی و تا حدودی به واسطه مشخصه و ویژگی‌های مسئله تعیین و انتخاب می‌شود. وی مدعی است تفکر دانش‌آموز، به واسطه پروتکل‌هایی که در برخورد با گونه‌های معنایی اختیار و انتخاب می‌کند، قابل گزارش و توصیف است (Lamon, 1993). لذا به نظر می‌رسد گونه‌های معنایی در مسائل کلامی تناسب می‌تواند بستری برای توسعه تفکر جبری در نظر گرفته شود.

دانش پداگوژی محتوای معلمان در حوزه استدلال تناسبی

دانش پداگوژی محتوا، یک دانش عملی است؛ مبتنی بر دانش موضوعی معلمان و در همراهی با دانش پداگوژی آنها، که برای به ثمر رساندن اقدامات از سوی آن‌ها در کلاس درس کاملا زمینه‌پردازی شده به‌کار گرفته می‌شود (Shulman, 1986).

در ادامه روند توسعه مفهوم «دانش پداگوژی محتوا»، تدوین سازه «دانش ریاضیات برای آموزش[1]» از سوی هیل، بال و شلینگ (Hill, Ball & Schilling, 2008) در شش مقوله صورت پذیرفت. در این تعریف، زیرسازه «دانش محتوای خاص» شامل دانش شیوه ارائه و شرح محتوای خاص ریاضی به دانش‌آموز و زیرسازه «دانش محتوا و دانش‌آموز» شامل نحوه یادگیری، توسعه شناخت و نحوه تفکر فراگیران درباره محتوای خاص ریاضی است؛ در عین حال، پژوهشگران ادعا می‌کنند شناخت بسیار اندکی از این دو دانش در هم تنیده، در حوزه استدلال تناسبی موجود است (Lobato et al, 2011). در این خصوص، می‌توان به تلاش‌های کرامر، پست و کوریر (Cramer, Post & Currier, 1993)، بن‌چایم و همکارانش (Ben-Chaim et al, 2008) اشاره کرد که متعاقب گزارش متولیان آموزشی از مشکلات مفهومی دانش‌آموزان، با مشخصه پردازی مسائل این حوزه و استراتژی‌های پرداختن به مسائل آن، به کاوش مراتب توسعه این استدلال پرداخته‌اند. در پژوهش‌ها، مواردی مشابه با دشواری‌های دانش‌آموزان، در بین معلمان مقاطع دبستان و راهنمایی گزارش شده است. این موارد شامل بسیاری از بدفهمی‌های مشترک و تصورات خام است. به گونه‌ای که لامون (Lamon, 1999) به صراحت از سطوح متفاوت درک نسبت و تناسب در بین معلمان یاد می‌کند.

در بررسی دانش پداگوژیک محتوای استدلال تناسبی در میان معلمان، لوباتو و همکاران (Lobato et al, 2011) معتقدند معلمان درکی سطحی از تناسب و شیوه توسعه استدلال تناسبی دارند. در این رابطه، اوریل و بورک (Orrill & Burke, 2013) تصریح می‌کنند ارائه استدلال تناسبی به شکل مفهوم‌مدار[2] برای معلمان دشوار است. بخشی از این دشواری به علت امکان تکیه بر الگوریتم‌های تناسبی نظیر ضرب متقابل در رسیدن به پاسخ صحیح می‌باشد؛ در حالی که به نظر می‌رسد بر ماهیت ضربی این رابطه و اجرای استراتژی‌های استدلال تناسبی، اشراف دارند. مواردی از این دست، استلزام‌ها را در فراهم ساختن شرایط تفکر تأملی معلمان در خصوص استدلال تناسبی وابسته به زمینه، ضرورت می‌بخشد. پیرو آنچه که به نقل از شولمن (Shulman, 1986)، در ارتباط با دانش پداگوژی محتوا، «پارادایم گم شده در تحقیقات مربوط به تدریس» خوانده شده است، در حوزه نسبت و تناسب، به توصیف ساختار درک معلمان از مؤلفه‌های استدلال تناسبی و سهم آنان در میزان توسعه این استدلال در دانش‌آموزان کمتر پرداخته شده است. این درحالی‌است که ادراک معلمان قطعاً بر تفسیرهای ایشان در مورد استدلال دانش‌آموز، اقدام‌های پداگوژیکی متعاقب و پیشبرد سلسله مراتب آموزشی تأثیرگذار است. در این رابطه، مطالعه هیل و همکارانش حاکی از لزوم توجه به توسعه دانش

1. Mathematical knowledge for teaching
2. Conceptual-oriented

پداگوژیکی محتوای خاص است (Hill, Ball & Schilling, 2008). بازتاب کیفیت فعالیت‌ها در تدریس معلمان، بازنمایی از کیفیت توسعه ساختارهای مفهومی نزد دانش‌آموزان است. از سوی دیگر درک و دریافت دانشجومعلمان از محتوای آموزشی «نسبت و تناسب» پر اهمیت است و می‌تواند حامل پیام‌هایی در خصوص کیفیت دانش ریاضی آن‌ها، شیوه‌های آماده‌سازی آنان برای فعالیت تدریس و ارتباط این دو با استلزام‌های توسعه استدلال تناسبی نزد دانش‌آموزان باشد. معلمان کاروزر، مراتب متفاوتی از درک وابسته به نوع مسئله دارند (Lim, 2009). به‌عنوان مثال، هینز و مک ماهون (Hines & McMahon, 2005) گرایش به استفاده از نوشتن معادله برای رابطه تناسبی از سوی معلمان آماده خدمت را کم ارزش تلقی نمودن استراتژهای عددی/جدولی، تصویری/ملموس و با نماد پردازی‌های اندک از سوی آنان گزارش می‌کنند. سان (Son, 2013) معتقد است بررسی استراتژی‌های حل مسئله معلمان آماده خدمت در حوزه تناسب توجه اندکی در ادبیات پژوهش‌ها به خود جلب کرده است.

روش

در جنبش اصلاحات متأخر، استدلال مبتنی بر موقعیت‌های غنی زمینه‌ای، مورد تأکید است. در این خصوص این سؤال مطرح است که معلمان و معلمان آماده خدمت تا چه اندازه در فعالیت تدریس، استلزامات منابع مفهومی را مبتنی بر زمینه مسئله، اجرا می‌کنند؟ نظر به این که همواره معلمان تشویق به هدف‌گیری درک مفهومی مفاهیم ریاضی شده‌اند، نیازمند تعیین این هستیم که آیا آن‌ها به انواع استدلال به‌عنوان در دسترس‌ترین نقاط ورودی و سوق دانش‌آموز به توسعه‌ی اشکال پیچیده‌تر استدلال، حساس هستند؟

در چارچوب مفهومی ترسیم شده از سوی گروسمن (Grossman, 1990) در خصوص دانش پداگوژی محتوا، یکی از وجوه، دانش و شناخت بازنمایی‌ها و استراتژی‌ها است. مبتنی بر دسته‌بندی لامون (Lamon, 1993) در خصوص گونه‌های معنایی مسائل تناسبی، پژوهشگران این مطالعه مشخصه معنایی مسائل کلامی تناسب را در نظر گرفته و توان توجیهی این مؤلفه را در فعالیت تدریس حل مسئله معلمان بررسی کرده‌اند. به این منظور، پیرو روش‌شناسی‌های کیل پاتریک در رابطه با حل مسئله، ماهیت استراتژی‌های انتخابی در فعالیت تدریس حل مسائل تناسبی، به‌عنوان یک متغیر فرایندی، با تمرکز بر چهار گونه معنایی از این مسائل کلامی مورد ارزیابی قرار گرفت. لازم به ذکر است این ارائه بخشی از نتایج یک مطالعه گسترده در خصوص دانش پداگوژی محتوای «نسبت و تناسب» در بین معلمان و دانشجومعلمان آماده خدمت در شهر تهران است. رویکرد پژوهش، توصیفی-زمینه‌یابی و روند بررسی آن، فرصت تأمل و ایجاد زمینه برای آگاهی از رویکرد مشارکت‌کنندگان را در اتخاذ استراتژی‌های حل مسئله در چهار گونه معنایی از مسائل کلامی تناسب، در جریان تدریس، فراهم می‌سازد. نتایج در تدوین برنامه‌های توسعه حرفه‌ای مرتبط، کاربردی است.

روند پژوهش مستلزم پیگیری‌های رسمی جهت اجرای یک دوره توسعه حرفه‌ای مشترک، خاص معلمان دبستان (دوره دوم) و معلمان ریاضی متوسطه اول (با تأکید بر پایه هفتم)، در مناطقی از آموزش و پرورش شهر تهران و نیز چند پردیس آموزش دانشجومعلمان بود. حسب پذیرش، دارا بودن ظرفیت تعریف کد دوره در منطقه و همکاری مناطق، گام‌های تدوین و عملیاتی شدن دوره در سه منطقه آموزش و پرورش پیگیری و اجرا شد. به این ترتیب جامعه آماری شامل سه گروه مستقل معلمان دبستان و معلمان ریاضی متوسطه اول این مناطق و نیز دانشجومعلمان (دو رشته آموزش ابتدایی و آموزش ریاضی) سه پردیس بود. پیرو ارسال بخشنامه‌های فراخوان شرکت در این دوره به کلیه دبستان‌ها و مدارس متوسطه اول این مناطق، آمار معلمان داوطلب، معین و اجرای دوره در مرکز اختصاصی از سوی هر منطقه، به‌طور متوالی و مجزا صورت گرفت. حجم نمونه در دسترس معلمان داوطلب، ۱۱۲ نفر بود. این افراد طی دو جلسه نخست دوره، در شش آزمون قلم-کاغذی، مورد ارزیابی قرار گرفتند. نمونه در دسترس دانشجومعلمان سال آخر نیز از دو پردیس دختران و یک مرکز پسران، پیرو هماهنگی مقتضی و همکاری اساتید، در چند نیم جلسه کلاسی مورد ارزیابی قرار گرفتند.

آمار افراد شرکت‌کننده در پژوهش در جدول ۱ نمایش داده شده است.

جدول ۱. فراوانی نمونه آماری به تفکیک مناطق و دورهٔ تدریس

دوره‌ها / گروه‌های مشارکت‌کننده	دورهٔ ابتدایی	دورهٔ متوسطه اول	کل
معلمان منطقه ۱۳	۳۴	۷	۴۱
معلمان منطقه ۱۹	۱۳	۲۱	۳۴
معلمان منطقه ۳	۲۸	۹	۳۷
دانشجومعلمان	۲۷	۴۱	۶۸
کل	۱۰۲ (٪ ۵۷)	۷۸ (٪ ۴۳)	۱۸۰ (٪ ۱۰۰)

بر اساس اطلاعات جدول ۱، ۶۲/۲ درصد مشارکت‌کنندگان در پژوهش، معلمان در حال خدمت (شامل ۷۵ معلم دبستان و ۳۷ معلم ریاضی) بودند. سابقه کاری معلمان دبستان بین ۹-۲۷ سال و تجربه کاری معلمان ریاضی، بیش از هفت سال بود. رشته تحصیلی ۶۹ درصد معلمان دبستان، آموزش ابتدایی نبود. ۳۷/۸ درصد مشارکت‌کنندگان، معلمان آماده خدمت (شامل ۶۸ دانشجوی ترم آخر) بودند.

ابزار پژوهش، آزمونی با ۱۲ مسئله کلامی تناسب از چهار گونه معنایی بود. این مجموعه مسائل توسط محققان پژوهش، طرح و یا از بین ابزار منابع پژوهشی معتبر انتخاب شده بود. ساختار عددی به‌عنوان یک متغیر کنترل شده در طرح مسائل هر یک از گونه‌های معنایی در نظر گرفته شد؛ این کنترل به شکل ارائه مسائل با چهار نوع ساختار عددی در هر چهار گونه معنایی بود. مسائل ارائه شده نوع تناسب مستقیم بود تا معلمان، با داشتن سطوح متفاوتی از دانش محتوا، دغدغه یک ارائه مفهومی در تدریس حل مسئله را به صرفا یافتن پاسخ نهایی برای مسئله اولویت دهند. بخش میانی مسائل آزمون، در جدول شماره ۲ نمایش داده شده است. طراحی ابزار سنجش، مبتنی بر معیار ارزش تشخیصی صورت گرفته است؛ به گونه‌ای که ملاحظه ابعادی اعم از ساختار عددی، نوع گونه معنایی و سبک ارائه مسئله، زمینه ساز گستره تنوع در رفتار ریاضیاتی فرد شود. ماهیت استراتژی‌های انتخابی به‌عنوان یک متغیر فرایندی مورد بررسی قرار گرفت.

جدول ۲. نمایش بخش دوم مسائل ابزار آزمون

مسئله	نوع گونه معنایی
۵- دو مستطیل متشابه هستند ابعاد اولی ۱۲ و ۶ است. اگر طول دومی برابر۵ باشد. عرض آن را به دست آورید (W.A)	انبساط-انقباض‌ها
۶- مینا وسارا در حال بازی با اسکیت هستند. سارا اسکیت باز ماهری است. زمانی که مینا صرف طی نمودن ۵۵ متر می‌کند، سارا ۲۲۰ متر طی کرده است. اگ مینا ۱۶۵ متر راطی کند سارا چه مسافتی را طی خواهد نمود؟ (B&W.A)	مجموعه‌های مرتبط
۷- حدود ۲۰ دقیقه زمان برای تصحیح اوراق امتحانی ۴ دانش‌آموز زمان صرف می‌شود. برای تصحیح اوراق یک کلاس ۲۲ نفری به چه مقدار زمان نیاز هست؟ (W.A)	اندازه‌های خوب قطعه بندی شده
۸- برای درست کردن نوعی رنگ سبز به دو قوطی رنگ آبی و پنج قوطی رنگ زرد نیاز داریم. اگر نیاز باشد پنج قوطی رنگ زرد اضافه کنیم به چند قوطی رنگ آب بیشتر نیاز داریم؟ (B.A)	جزءجزءکل

در ارتباط با اعتبار و کیفیت ابزار پژوهش، بررسی اعتبار محتوا از جمله اعتبار صوری، توسط اساتیدی از حوزه آموزش ریاضی، روانسنجی و آزمون‌سازی انجام شد. ضریب قابلیت اعتماد مناسب ابزار، در بررسی پایایی سؤالات، احراز شد.

درخواست از مشارکت‌کنندگان برای حل مسائل آزمون، درج استراتژی‌های حل، شرح استدلال و بازنمایی‌ها به تفکیک هر یک از مسائل، مشابه آنچه در تدریس ارائه می‌کنند، مورد تأکید قرار گرفت. داده‌ها در خصوص دانش محتوا و نوع استراتژی‌های به کار گرفته شده در شرح حل مسائل در فعالیت تدریس، از سوی مشارکت‌کنندگان، به تفکیک گونه‌های معنایی، گردآوری و مورد تحلیل کمّی قرار گرفت. محققان این مطالعه، پیرو ملاحظات طرح شده از سوی

کیل‌پاتریک در تحقیق راجع به حل مسئله و تدریس استراتژی‌ها، در خصوص دلایل افراد برای رفتار در شرایط همسان یا غیرهمسان، ضرورت مد نظر قرار دادن مشابهت‌ها یا تفاوت‌ها را رعایت کرده‌اند. در ارتباط با عملکرد سه گروه شرکت‌کننده در پژوهش، تحلیل در چهار گونه معنایی مذکور (خرده آزمون‌ها)، در ارتباط با هفت استراتژی حل مسائل تناسب مستقیم مطابق جدول ۳ انجام شد.

جدول ۳. دسته‌بندی استراتژی‌های منجر به حل صحیح در بررسی حل مسائل تناسب مستقیم

استراتژی‌های استدلال تناسبی(عددی-تابعی)	الگوریتم‌های تناسبی
۱- استراتژی ضرب بین‌نسبتی (B.A) (ارائه بستر برای استدلال تناسبی عددی) (در هر دو بازنمایی جدول نسبت-تساوی کسری)	۵- ضرب متقابل (C.M) (در هر دو بازنمایی جدول نسبت-تساوی کسر)
۲- استراتژی ضرب درون‌نسبتی (W.A) (ارائه بستر برای استدلال تناسبی تابعی) (در هر دو بازنمایی جدول نسبت-تساوی کسری)	۶- قاعده سه (R.T)
۳- تعیین نرخ واحد (U.V) (ارائه بستر برای استدلال تناسبی تابعی)	۷- معادلات جبری (A.E)
۴- به‌کارگیری ضریب مقیاس (S.F) (ارائه بستر برای استدلال تناسبی تابعی)	

یافته‌ها

در تحلیل عملکرد سه گروه مستقل شرکت‌کننده در استفاده از استراتژی‌های منجر به حل صحیح (شامل همه روش‌های حل اعم از به‌کارگیری استدلال تناسبی یا الگوریتم‌ها) در مجموعه مسائل چهار گونه معنایی، فرضیه نرمال بودن متغیرها به تفکیک گروه‌ها و گونه‌های معنایی مطابق جدول ۴ بررسی شد.

جدول ۴. نتایج بررسی فرضیه نرمال بودن عملکرد سه گروه در انتخاب استراتژی منجر به حل صحیح مسئله

	گونه اول (م. مرتبط)	گونهٔ دوم (م. جزءجزءکل)	گونهٔ سوم (ا.خوب قطعه‌بندی شده)	گونهٔ چهارم (انبساط و انقباض‌ها)
معلمان دبستان	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱
معلمان متوسطه اول	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱
دانشجومعلمان	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱

با توجه به رد این فرض برای متغیر استفاده از استراتژی‌های منجر به حل صحیح در مجموعه مسائل هر چهار گونه معنایی از سوی سه گروه شرکت‌کننده، برای مقایسه این متغیر بین گونه‌های معنایی در بین گروه‌ها، از آزمون ناپارامتری کروسکال والیس استفاده شد. نتایج نشان داد در استفاده از استراتژی‌های منجر به حل صحیح در مسائل چهار گونه معنایی در مورد هر سه گروه مستقل مشارکت‌کننده، تفاوت‌های معنادار آماری وجود دارد (جدول ۵).

جدول ۵. نتایج بررسی میانگین عملکرد سه گروه در استفاده از استراتژی‌های منجر به حل صحیح در ۴ گونه معنایی

	گونه اول (مجموعه‌های مرتبط) M(SD)	گونهٔ دوم (م. جزءجزءکل) M(SD)	گونهٔ سوم (ا. قطعه‌بندی شده) M(SD)	گونهٔ چهارم (انبساط و انقباض‌ها) M(SD)	معناداری
معلمان دبستان	۲/۴۵ (۰/۷۷)	۲/۰۰(۰/۶۱)	۲/۳۷ (۰/۸۶)	۱/۷۲(۰/۸۴)	P < ۰/۰۰۱
معلمان متوسطه اول	۲/۸۱ (۰/۴۶)	۲/۳۰(۰/۵۲)	۲/۶۲ (۰/۷۵)	۲/۵۱(۰/۶۵)	P < ۰/۰۰۱
دانشجومعلمان	۲/۴۷ (۰/۷۶)	۲/۰۳(۰/۷۳)	۲/۷۲ (۰/۵۶)	۲/۵۱(۰/۷۰)	P < ۰/۰۰۱

براساس نتایج آزمون تعقیبی و نیز یافته‌های توصیفی، میانگین عملکرد معلمان دوره ابتدایی در استفاده از استراتژی‌های منجر به حل صحیح در همه مقایسات دو به دو، به جز مقایسه گونه معنایی اول و سوم، معنادار بود و میانگین این عملکرد در گونه اول بیشتر از سایر گونه‌ها بود. میانگین این عملکرد در مسائل گونهٔ معنایی اول به‌طور معناداری بیشتر از گونهٔ دوم و چهارم بود. در گونهٔ دوم به‌طور معناداری کمتر از گونهٔ سوم و بیشتر از گونهٔ چهارم بود. در گونهٔ سوم به‌طور معناداری بیشتر از گونهٔ چهارم بود. در گروه معلمان ریاضی متوسطه اول، میانگین این عملکرد (استفاده از استراتژی‌های منجر به حل صحیح) در مسائل گونهٔ معنایی اول به‌طور معناداری بیش از گونه‌های دوم و چهارم بود، اما با گونه معنایی سوم تفاوت معناداری نداشت. همچنین میانگین این عملکرد درگونه معنایی سوم به‌طور معناداری بیش از گونه دوم بود. سایر مقایسه‌های دو به دو، معنادار نبودند. در بررسی عملکرد دانشجومعلمان، به جز مقایسه گونه معنایی اول و چهارم، میانگین عملکرد این گروه در به‌کارگیری استراتژی‌های منجر به حل صحیح، در تمامی مقایسات دو به دو معنادار بود. میانگین این عملکرد در مسائل گونهٔ معنایی اول به‌طور معناداری بیش از گونهٔ دوم بود. در مسائل گونهٔ دوم به‌طور معناداری کمتر از گونهٔ سوم و در گونهٔ سوم به‌طور معناداری، بیشتر از گونهٔ چهارم بود. به بیان دیگر، در خصوص این گروه از مشارکت‌کنندگان نیز، حل صحیح مسائل تناسبی، مستقل از نوع گونه معنایی این مسائل نبود.

در ترکیب گونه‌های معنایی (مستقل از نوع گونه‌ها)، بین میانگین عملکرد سه گروه مشارکت‌کننده، در استفاده از استراتژی‌های منجر به حل صحیح مسئله، نتیجه بررسی نرمال بودن مجموع نمرات چهار گونه برای هر سه گروه معنادار بود. طبق نتایج آزمون متعاقب، میانگین عملکرد گروه‌ها در حل صحیح مسائل تناسبی مستقل از نوع گونه معنایی (در ترکیب گونه‌های معنایی)، از تفاوت‌های معناداری برخوردار بود. براساس یافته‌ها، در ترکیب گونه‌ها، میانگین عملکرد هر یک از دو گروه معلمان متوسطه اول و دانشجومعلمان در استفاده از استراتژی‌های منجر به حل صحیح، به‌طور معناداری بهتر از عملکرد معلمان دوره ابتدایی بود. بین میانگین عملکرد معلمان متوسطه اول و دانشجومعلمان، اختلاف معناداری وجود نداشت (جدول۶).

جدول ۶. مقایسه میانگین عملکرد گروه‌ها در انتخاب استراتژی‌های منجر به حل صحیح مسئله در ترکیب ۴ گونه معنایی

	معلم ابتدایی M(SD)	متوسطه اول M(SD)	دانشجو معلم M(SD)	معناداری
ترکیب چهار گونه معنایی	۸/۵۴(۱/۸۳)	۱۰/۲۴(۱/۴۰)	۹/۷۳(۱/۸۰)	P < ۰/۰۰۱

در خصوص عملکرد گروه‌های مشارکت‌کننده، در استفاده از استراتژی‌های استدلال تناسبی (عددی و تابعی) در حل مسائل هر یک از چهار گونه معنایی، نتایج بررسی فرضیه نرمال بودن متغیرها به تفکیک گروه‌ها و گونه‌های معنایی، در جدول ۷ ارائه شده است.

جدول ۷ . نتایج بررسی فرضیه نرمال بودن عملکرد گروه‌ها در انتخاب استراتژی استدلال تناسبی در حل مسئله

	گونه اول (م. مرتبط)	گونهٔ دوم (م. جزءجزءکل)	گونهٔ سوم (ا. خوب قطعه‌بندی شده)	گونهٔ چهارم (انبساط و انقباض‌ها)
معلمان دبستان	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱
معلمان متوسطه اول	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱
دانشجومعلمان	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱	P < ۰/۰۰۱

با رد فرضیه نرمال بودن، نتایج آزمون ناپارامتری کروسکال والیس در بررسی میانگین عملکرد گروه‌ها در انتخاب استراتژی‌های استدلال تناسبی (عددی-تابعی) در حل مسائل هر یک از گونه‌ها، در جدول ۸ ارائه شد.

جدول ۸. نتایج بررسی میانگین عملکرد گروه‌ها در استفاده از استراتژی‌های استدلال تناسبی در ۴ گونه معنایی

	گونه اول (مجموعه‌های. مرتبط) M(SD)	گونهٔ دوم (م. جزءجزءکل) M(SD)	گونهٔ سوم (ا.خوب قطعه‌بندی شده) M(SD)	گونهٔ چهارم (انبساط و انقباض‌ها) M(SD)	معناداری
معلمان دبستان	۱/۸۸(۰/۹۹)	۱/۸۰(۱/۱۱)	۲/۰۱(۰/۹۶)	۱/۶۵(۰/۹۶)	P=۰ /۱۵۷
معلمان متوسطه اول	۰/۹۲(۱/۰۳)	۰ /۷۸ (۰/۸۸)	۱/۴۹(۰/۹۳)	۱/۰۲(۰/۸۳)	P=۰ /۰۰۴
دانشجومعلمان	۰ /۳۸(۰/۵۴)	۱/۰۱(۰/۹۳)	۱/۴۳(۰/۹۳)	۰/۷۰(۰/۷۳)	P < ۰/۰۰۱

بررسی‌ها نشان داد در گروه معلمان دبستان، میزان استفاده از استراتژی‌های استدلال تناسبی در حل مسائل هر چهار گونه معنایی، در مقایسات دو به دو، از اختلاف معناداری برخوردار نیست. به بیان دیگر، عملکرد معلمان دبستان در استفاده از استراتژی‌های استدلال تناسبی (عددی و تابعی)، مستقل از نوع گونه معنایی بود. اما میانگین عملکردها در گروه معلمان متوسطه اول و نیز دانشجومعلمان، در مقایسات دوبه‌دو، شامل اختلاف‌های معنادار بود. میانگین عملکرد گروه معلمان متوسطه در انتخاب استراتژی‌های استدلال تناسبی (عددی و تابعی) در حل مسائل گونه معنایی سوم به‌طور معناداری بیشتر از سایر گونه‌ها بود. سایر مقایسات از اختلاف معناداری برخوردار نبود. عملکرد دانشجومعلمان در میزان به‌کارگیری استراتژی‌های استدلال تناسبی (عددی و تابعی)، در حل مسائل گونهٔ معنایی سوم، در مقایسات دوبه‌دو، به‌طور معناداری بیش از سایر گونه‌ها بود. میانگین عملکرد این گروه در به‌کارگیری این استراتژی‌ها در حل مسائل گونهٔ اول، به‌طور معناداری کمتر از سایر گونه‌ها بود.

در بررسی عملکرد گروه‌ها در استفاده از استراتژی‌های استدلال تناسبی برای حل مسائل این حوزه، در ترکیب گونه‌های معنایی (مستقل از نوع گونه)، فرض نرمال بودن در مورد هر سه گروه رد شد. طبق نتایج آزمون متعاقب، بین میانگین عملکرد گروه‌ها، تفاوت‌های معنادار آماری مشاهده شد (جدول۹). براساس یافته‌ها، عملکرد معلمان دوره ابتدایی، در انتخاب استراتژی‌های استدلال تناسبی (عددی-تابعی)، در ترکیب گونه‌های معنایی، به‌طور معناداری بهتر از عملکرد معلمان متوسطه اول و دانشجومعلمان بود. بین عملکرد معلمان متوسطه اول و دانشجومعلمان (آماده خدمت)، در این خصوص اختلاف معناداری وجود نداشت.

جدول ۹. مقایسه میانگین عملکرد گروه‌ها در انتخاب استراتژی‌های استدلال تناسبی در ترکیب ۴ گونه معنایی

	معلم ابتدایی M(SD)	متوسطه اول M(SD)	دانشجو معلم M(SD)	معناداری
ترکیب چهار گونه معنایی	۷/۳۴ (۲/۷۷)	۴/۲۱ (۲/۳۹)	۳/۵۲ (۱/۹۶)	P < ۰/۰۰۱

بحث و نتیجه‌گیری

اهمیت این بررسی منوط به درک این مطلب است که فهم و درک اندک، معیوب و کم‌مایه سازه تناسب از سوی دانش‌آموزان، در به‌کارگیری ضعیف دانش حسابی، در رابطه با پیشبرد مسائل ضربی، سهیم است. از سوی دیگر، قرار گرفتن در مسیر توسعه تفکر تناسبی، در پیشبرد درک سلسله مراتب این مفهوم از سوی آنان در سطوح بالاتر تحصیلی از جمله توابع نقش ایجابی دارد. ملاحظه تفکر پداگوژی معلمان در حل مسائل تناسبی، بحث و گفتمان در خصوص موانع به‌کارگیری استدلال تناسبی را در میان گونه‌های متفاوت معنایی فراهم می‌آورد.

در این پژوهش، شیوه پرداختن به حل مسائل کلامی تناسب مستقیم از نقطه‌نظر ماهیت استراتژی‌های منجر به حل صحیح، شامل استدلال‌های تناسبی و الگوریتم‌ها، در چهار گونه معنایی از این مسائل، در فعالیت آموزش حل مسئله از سوی مشارکت‌کنندگان مورد بررسی قرار گرفت. سه گروه مستقل شرکت‌کننده از دانش محتوای کافی برای حل مسائل تناسب مستقیم که معمولا برای پایه‌های ۵ تا ۷ مطرح می‌شود برخوردار بودند. نتایج، در مورد هر سه گروه،

روابط معناداری را در میزان به‌کارگیری استراتژی‌های منجر به حل صحیح در چهار گونه معنایی از مسائل این حوزه نشان داد؛ به بیان دیگر، حل صحیح مسائل پژوهش، توسط هر سه گروه، وابسته به نوع گونه معنایی بود. عملکرد سه گروه شرکت‌کننده، در استفاده از استراتژی‌های منجر به حل صحیح، در ترکیب چهار گونه معنایی مذکور، (مستقل از نوع گونه‌ها) نیز از اختلاف‌های معناداری برخوردار بود. از سوی دیگر، روابط معناداری در میزان به‌کارگیری استراتژی‌های استدلال تناسبی (عددی و تابعی)، در چهار گونه معنایی، در بین دو گروه معلمان متوسطه اول و دانشجومعلمان (آماده خدمت) مشاهده شد؛ لیکن عملکرد معلمان دبستان در استفاده از استراتژی‌های استدلال تناسبی (عددی و تابعی) مستقل از نوع گونه معنایی بود. همچنین میزان به‌کارگیری این استراتژی‌ها از سوی معلمان دبستان در هر چهار گونه معنایی، با اختلاف معنادار، بهتر از عملکرد دانشجومعلمان بود. در عین حال، استفاده از استدلال‌ها تناسبی (عددی و تابعی) در میان معلمان ابتدایی صرف‌نظر از نوع گونه‌ها (در ترکیب گونه‌ها)، با اختلاف معنادار، بیش از دو گروه دیگر بود. برای معلمان متوسطه اول و دانشجومعلمان، نرخ استفاده از این استراتژی‌ها در گونه معنایی «اندازه‌های خوب قطعه‌بندی شده» بیش از سایر گونه‌های معنایی بود. برای دانشجومعلمان به‌کارگیری این استراتژی‌ها در گونه «مجموعه‌های مرتبط» کمتر از سایر گونه‌ها بود. این در حالیست که مسائل «مجموعه‌های مرتبط» می‌توانند تفکر نسبی بیشتری نسبت به سایر گونه‌های معنایی، در میان اغلب دانش‌آموزان برانگیزند. دلیل این امر نیز ماهیت تصویرپردازی و دست‌ورزی بالای این تکالیف است (Lamon, 1993). از سوی دیگر برای گروه معلمان متوسطه اول، استفاده از استراتژی‌های استدلال تناسبی در موقعیت‌های «جزءجزءکل» کمترین بود؛ در حالی که مسائل این گونه معنایی فهم و تصور دانش‌آموز از همگنی را تثبیت می‌کند؛ تشخیص این که رابطه‌ای وجود دارد که نیازمند حفظ شدن است و این امر مؤلفه‌ای مهم در توسعه تفکر تناسبی محسوب می‌شود (Lo & Watanabe, 1997). خاطرنشان می‌شود که فهم موقعیت‌های «جزءجزءکل» و «مجموعه‌های مرتبط» در محتوای تناسب، در سالهای بعد برای یادگیری جبر حیاتی خواهند بود. به نظر می‌رسد شناخت و اقتضای به‌کارگیری هر یک از گونه‌های معنایی از سوی معلمان و ارائه در طرح تعلیمی دانشجویان یک ضرورت است.

به رغم تأکید محقق در زمان ارزیابی، قریب به اتفاق مشارکت‌کنندگان فارغ از حل ریاضی مسائل، از ارائه هر نوع توصیف نوشتاری در خصوص اقدام خود، مبتنی بر زمینه مسئله، ساختارعددی و انتخاب استراتژی در موقعیت تدریس مسائل مذکور اجتناب کردند. به نظر می‌رسد برای مشارکت‌کنندگان، تناسب، مفهومی ساده یا با ماهیتی شهودی، فارغ از نیاز به شرح بوده باشد. لازم به ذکر است دشواری استفاده از کلمات، می‌تواند ریشه در انسجام ناکافی تفکر پداگوژی معلم در این حوزه داشته باشد و نیز آن را رقم بزند. در این رابطه، فراخوانی معلمان و دانشجویان به این تذکر از سوی کرامر و همکاران (Cramer et al, 1993) ضروری است؛ که هر فرد می‌تواند با استفاده از الگوریتم یک تناسب را حل کند اما این به‌معنای پویایی و تحرک وی در استدلال تناسبی نیست. در این شرایط، تفکر تأملی روی درک شخصی به‌عنوان معلم نسبت به انواع متغیرها در مسائل تناسب، می‌تواند به‌عنوان در دسترس‌ترین تکلیف پداگوژیکی در نظر گرفته شود. عمق بخشیدن به درک شخصی و حساس بودن به ماهیت استراتژی‌ها و توسعه دانش بازنمایی‌ها در فعالیت آموزشی حل مسائل این محتوا، منجر به سوق فراگیران در مسیر توسعه فرم‌های پیچیده‌تر استدلال تناسبی می‌شود. هر چند درک شیوه این تأثیرگذاری نیازمند تفحص بسیاراست.

مشارکت نویسندگان

این مقاله حاصل همکاری تمامی نویسندگان به صورت مساوی می‌باشد.

تشکر و قدردانی

از دست اندرکاران نشریه مطالعات آموزشی و آموزشگاهی، قدردانی می‌شود.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است»

منابع

Aleman, B. P. (2007). The effect of a proportional reasoning-based test preparation instructional treatment on mathematics achievement of eight grade students. A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for degree of Doctor of Education. Faculty of the college of Education, University of Houston. URL: https://www.proquest.com/openview/034a8f2147716897c8aaf1bf035f74d6/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750

Artut, P. D., Pelen, M. S. (2015). 6th grade gtudents' golution gtrategies on proportional reasoning problems. *Journal of Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 197(11), 113-119. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.07.066

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education. pre-and in-service mathematics teachers of elementary and middle school classes*. Rotterdam, the Netherlands: Sense.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. S. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: The impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4), 333-340. https://doi.org/0.1007/s10857-007-9052-x

Charalambos, Y., Hill, H., Ball, D. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: How does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(6), 441-463. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9182-z

Clark, M. R., Berenson, S. B.& Cavey. L. O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*. *22(3):* 297-317. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00023-3

Cramer, K. A., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications: *Middle grades mathematics. In Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics (pp.159-178),* New York: Macmillan.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. Teachers College Press, Teachers College, Columbia University.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, *39*(4), 372-400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Hines, E., McMahon, M. T. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations from preservice teachers. *School Science and Mathematics*, *105*(2), 88-105. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2005.tb18041.x

Howe, C., Luthman, S., Ruthven, k., Mercer, N., Hofman, R., Ilies, S., & Guardia, P. (2015). Rational number and proportional reasoning in early secondary school: towards principled improvement in mathematics. *Research in Mathematics Education*. 17(1), 38-56. https://doi.org/10.1080/14794802.2015.1019914

Howe, C., T. Nunes, and P. Bryant. (2011). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 391-417. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9249-9

Lamon, S, J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal*

for research in mathematics education, *24*(1), 41-61. https://doi.org/10.2307/749385

Lamon, S, J. (1996) .The development of unitizing: Its role in childeren's patitionings strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 170-193. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.27.2.0170

Lamon, S, J. (1999). Teaching fractions and ratios for understanding: Essentiol content knowledge and instructional strategies for teachers. *Mahwah*. NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 629-667. Reston, VA: NCTM

Lim, K. H. (2009). Burning the candle at just one end. Using nonproportional examples helps students determine when proportional strategies apply. *Mathematics Teaching in the MiddleSchool*, 14(8): 492–500. https://doi.org/10.5951/MTMS.14.8.0492

Lo, J. J., & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for research in mathematics education*, *28*(2), 216-236. https://doi.org/10.2307/749762

Lobato J. Orrill, H, Ch. Druken, B., Jacobson, E. (2011). Middle school teachers' knowledge of proportional reasoning for teaching. in Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), New Orleans, LA. Abstract retrieved from http://www. kaputcenter. umassd. edu/ downloads/ products/ workshops/ AERA2011/ Lobato Orrill Druk en Erikson AERA July12-13.

Nagar, G. G., Weiland, T., Orrill, C. H, & Burke, J. P. (2015). Teachers' understanding of ratios and their cinnections to fractions. Hands book of PMENA-37. Bartell, T.G., Bieda, K. N., Putnam, R.T., Bradfield, K., & Dominguez, H.(Eds), pp 764-771. (Proceedings of the 37th Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. East Lansing, MI: Michigan State University).

NCTM (1989). National Council of Teachers of mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. URL: https://nap.nationalacademies.org/read/5844/chapter/5

NCTM (2013). Research Brief: Teaching Ratio and Proportion in the Middle Grades. Available from: https://www.nctm.org

Orrill, C. H., & Burke, J. P. (2013). Fine-grained analysis of teacher knowledge: proportion and geometry. Hands book of PMENA-35. Martinez, M. & Castro Superfine, A. (Eds.), pp 605-612. (Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Chicago, IL: University of Illinois at Chicago).

Parish, L. (2010). Facilitating the Development of Proportional Reasoning through Teaching Ratio. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, 469-476. URL: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED520962.pdf

Pearce, D. L., Bruun, F., Skinner, K., & Lopez-Mohler, C. (2013). What Teachers Say About Student Difficulties Solving Mathematical Word Problems in Grades 2-5. International Electronic Journal of Mathematics Education, 8(1),3-19. https://doi.org/10.29333/iejme/271

Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 149-169. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9175-y

Radford, L. (2011). Grade two students' non-symbolic algebraic thinking. In *Early algebraization* Springer, Berlin, Heidelberg.

Riley, K. R. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. In *Proceedings of the*

32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 6, 1055-1061.

Ruiz Ledesma, E. F. R. (2011). Primary and Secondary Teachers' Knowledge, Interpretation, and Approaches to Students Errors about Ratio and Proportion Topics. *Creative Education*, *2*(03), 264-269. https://doi.org/10.4236/ce.2011.23035

Ruiz Ledesma, E. F. R. (2013). Activities to learn the proportion concept using technology. *Journal of International Review of Social Sciences and Humanities*, 5(1), 175-184.

Sen, C., Guler, G. (2017). Effect of Strategy Teaching for the Solution of Ratio Problems on Students' Proportional Reasoning Skills. *Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, 5(2)1-15. URL: https://mojem.um.edu.my/index.php/MOJES/article/view/12621

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Silvestre, A. I. da Ponte J. P. (2012). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion? *PNA*, 6(3), 73-83.

Son, J. W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational studies in mathematics*, *84*(1), 49-70. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.00005.x

Spanoudi, A., & Misailidou, C. (2015). *Teachers encountering challenging word problems: How do they solve them?*

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational studies in Mathematics*, *16*(2), 181-204. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9393-y