



ORIGINAL RESEARCH PAPER

Content Analysis of Elementary School Mathematics Textbooks in Situations Based on Approximation and Estimation

Fatemeh Raei^{*1}, Mohammad Bagher Kazemi²

¹ Assistant Prof, Department of Mathematics Education, Farhangian University, PO Box 889-14665 Tehran, Iran.

² Associate Prof, Department of Mathematics, University of Zanjan, PO Box 45371-38791 Zanjan, Iran.

ABSTRACT

Keywords

Content Analysis
Measurement Estimation
Quantity Estimation
Computational Estimation
Elementary School
Mathematics

1. Corresponding author
✉ f.raei@cfu.ac.ir

Received: 2023/07/05
Reviewed: 2024/04/17
Accepted: 2024/06/17
Published online: 2025/09/17



Background and Objectives: Estimation is a vital mathematical skill that enhances conceptual understanding and the application of mathematics in daily life. Despite the emphasis of the national curriculum on this area, a systematic analysis of textbook content from this perspective is essential. This study aims to analyze the content of elementary school mathematics textbooks (grades 1 to 6) published in 1401 (2022-23), focusing on situations based on approximation and estimation and evaluating the attention paid to its different components. **Methods:** This research was conducted using a quantitative-qualitative content analysis method and employing Krippendorff's content analysis techniques. The statistical population included all content of elementary school mathematics textbooks (grades 1 to 6) published in 1401. The unit of analysis was "educational situations related to estimation." The content was categorized and studied based on four main components: measurement estimation, quantity estimation, computational estimation, and number line estimation. **Findings:** The findings indicate that although the textbook authors have paid attention to the topic of estimation, this attention has not been distributed evenly. Specifically, the main focus has been on "computational estimation" and "number line estimation" components, while less attention has been paid to "measurement estimation" and "quantity estimation." Furthermore, the distribution of content across different grades is not uniform, with the first and third grades having the fewest estimation situations. In terms of concepts, estimation of length, area, volume, mass, time, counting, and approximation of numbers (natural, fraction, decimal) have been addressed. However, important concepts such as estimation of temperature, angles, and coordinate axes have been neglected. **Conclusion:** Given the key role of estimation in strengthening number sense and understanding applied mathematics, a more balanced distribution of estimation situations across all grades and for all components—especially measurement and quantity estimation—should be considered.

<https://pma.cfu.ac.ir>

DOI: [10.48310/pma.2025.14345.4138](https://doi.org/10.48310/pma.2025.14345.4138)

Citation (APA) Raei, F. and Kazemi, M. B. (2025). Content analysis of elementary mathematics textbooks in situations based on approximation and estimation. *Educational and Scholastic studies*, 14 (3), 129 - 143 .

 <https://doi.org/10.48310/pma.2025.14345.4138>



تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی در موقعیت‌های مبتنی بر تقریب و تخمین

مقاله پژوهشی / مروری

فاطمه راعی^{۱*}، محمدباقر کاظمی^۲

۱ / استادیار گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵ تهران، ایران.

۲ / دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه زنجان، صندوق پستی ۳۸۷۹۱-۴۵۳۷۱ زنجان، ایران.

چکیده

پیشینه و اهداف: تخمین به عنوان یک مهارت ریاضی حیاتی، درک مفهومی و کاربرد ریاضیات در زندگی روزمره را تقویت می‌کند. با وجود تأکید برنامه درسی ملی بر این حوزه، تحلیل محتوای کتاب‌های درسی از این منظر ضروری به نظر می‌رسد. هدف این پژوهش، تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی (پایه اول تا ششم) چاپ ۱۴۰۱ با تمرکز بر موقعیت‌های مبتنی بر تقریب و تخمین و ارزیابی میزان توجه به مؤلفه‌های مختلف آن است. **روش‌ها:** این پژوهش به روش تحلیل محتوای کمی-کیفی و با استفاده از تکنیک‌های تحلیل محتوای کریپندورف انجام شده است. جامعه آماری تحقیق، کلیه محتوای کتاب‌های درسی ریاضی پایه اول تا ششم ابتدایی چاپ سال ۱۴۰۱ بود. واحد تحلیل، «موقعیت‌های آموزشی مرتبط با تخمین» در نظر گرفته شد و مطالب بر اساس چهار مؤلفه اصلی «تخمین اندازه‌گیری»، «تخمین کمیت»، «تخمین محاسبات» و «تخمین بر محور اعداد» دسته‌بندی و مورد مطالعه قرار گرفت. **یافته‌ها:** یافته‌ها نشان می‌دهد که اگرچه مؤلفان کتاب‌های درسی به مبحث تخمین توجه داشته‌اند، اما این توجه به صورت متوازن توزیع نشده است. به طور مشخص، تمرکز اصلی بر مؤلفه‌های «تخمین محاسبات» و «تخمین بر محور اعداد» بوده و به مؤلفه‌های «تخمین اندازه‌گیری» و «تخمین کمیت» کمتر پرداخته شده است. همچنین، پراکندگی محتوا در بین پایه‌های مختلف یکسان نیست به طوری که پایه‌های اول و سوم از کمترین میزان موقعیت‌های تخمین برخوردارند. از نظر مفاهیم، به تخمین طول، مساحت، حجم، جرم، زمان، شمارش و تقریب اعداد (طبیعی، کسری، اعشاری) اشاره شده، اما مفاهیم مهمی مانند تخمین دما (درجه حرارت)، زاویه و محورهای مختصات مغفول مانده‌اند. **نتیجه‌گیری:** با توجه به نقش کلیدی تخمین در تقویت حس عدد و درک ریاضیات کاربردی، لازم است توزیع متعادل‌تری از موقعیت‌های تخمین در تمامی پایه‌های تحصیلی و برای همه مؤلفه‌ها به ویژه تخمین اندازه‌گیری و کمیت در نظر گرفته شود. گنجاندن تخمین مفاهیم مهمی مانند دما، زاویه و محورهای مختصات در بازنگری‌های آینده کتاب‌های درسی توصیه می‌شود.

از دستگاه خود برای اسکن و خواندن مقاله به صورت آنلاین استفاده کنید.

واژه‌های کلیدی

تحلیل محتوا
تخمین اندازه‌گیری
تخمین کمیت
تخمین محاسبات
ریاضی دوره ابتدایی

۱. نویسنده مسئول

f.raei@cfu.ac.ir[✉]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۱۴

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۱/۲۹

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۲۸

انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۶/۲۶

شماره صفحات: ۱۲۹ - ۱۴۳

DOI: [10.48310/pma.2025.14345.4138](https://doi.org/10.48310/pma.2025.14345.4138)

شاپا الکترونیکی: ۲۶۴۵-۸۰۹۸



COPYRIGHTS

©2025 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.

مقدمه

یادگیری ریاضیات در مدارس ابتدایی یکی از اهداف مفید و مهم برای زندگی افراد در هر کشوری است. یادگیری ریاضیات در دوره ابتدایی دانش‌آموزان دبستانی را به تفکر منطقی، تحلیلی، سیستماتیک، انتقادی مجهز می‌کند (Kenedi et al., 2019). برای دانش‌آموزان امروزی درک بهتر ریاضیات حیاتی است. موفقیت در بازار کار فردا مستلزم توانایی به‌کاربردن دانش ریاضی در حل مسائل است. اگر دانش‌آموزان امروز قرار باشد در دنیای فردا به رقابت بپردازند و موفق باشند، باید بتوانند مفاهیم و مهارت‌های تازه را بیاموزند. ضروری است این افراد ریاضیات را ابزاری بدانند که می‌توانند از آن در زندگی روزمره استفاده نمایند (Jeremy Kilpatrick & Jane Swafford, 2007). تخمین زدن^۱ یک فعالیت فراگیر در زندگی کودکان و بزرگسالان، یک مهارت اصلی زندگی روزمره و یک عامل تعیین‌کننده شایستگی‌های حسابی بعدی، به ویژه در مورد موقعیت‌های بدیع است (Andrews et al., 2022).

مهارت تقریب و تخمین در زندگی روزمره کاربرد زیادی دارد. حل مسأله همواره در فعالیت‌های دانش‌آموزان باید حضور داشته باشد و مخصوصاً حل مسأله در موقعیت‌های واقعی و برآورد تقریبی جواب اهمیت ویژه‌ای دارد. در مبحث تقریب نیز درگیر کردن دانش‌آموزان با مسأله‌های گوناگون هم مهارت محاسبات تقریبی آن‌ها را توسعه می‌دهد و هم در پرورش خلاقیت فردی آنان می‌تواند مؤثر باشد. عدد یا نتیجه‌ای که دقیق نیست، ولی با روش‌های تقریبی که به اندازه کافی به عدد واقعی نزدیک است به دست آمده است، می‌تواند در یک موقعیت عملی مفید باشد. درک ارزش تقریب برای دانش‌آموزان زمانی آسان‌تر است که تقریب در موقعیت‌های مناسب به کار می‌رود. در این صورت دانش‌آموزان متوجه می‌شوند که استفاده از تقریب می‌تواند در تلاش یا انرژی صرفه‌جویی کند (Mildenthal, 2016). درک درست اعداد به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا در حل مسأله از خطاهای اساسی پرهیز کنند، به ویژه در مسائلی که به بزرگی اعداد مربوط می‌شوند، هر دانش‌آموزی که فهم خوبی از عدد داشته باشد و از ضرب دو عدد $9/83$ در $7/65$ عدد $7519/95$ را به دست آورد، باید بلافاصله به خطای خود پی ببرد، چون می‌داند پاسخ نمی‌تواند بیش از 10 ضرب در 8 یعنی 80 باشد، زیرا یکی از این دو عدد کمتر از 10 و دیگری کمتر از 8 است. این استدلال به دانش‌آموزان می‌فهماند که احتمالاً ممیز جابه‌جا شده است (Jeremy Kilpatrick & Jane Swafford, 2007).

بر اساس سند برنامه درسی ملی، توانمندسازی دانش‌آموزان در محاسبات عددی، ذهنی و تقریبی و به کار بردن ریاضیات در حل مسائل روزمره و امور انتزاعی یکی از اهداف اساسی آموزش ریاضی در نظام آموزشی ایران است (برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، ۱۳۹۱). یافتیان و عباسی (۱۴۰۱) در پژوهشی که به مقایسه مفاهیم ارائه شده در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی ایران و ژاپن پرداخته‌اند، بیان می‌کنند که مفهوم تقریب و تخمین جزو مفاهیم مشترک در کتاب‌های ابتدایی دو کشور هستند، و به دانش‌آموزان ایرانی در مقطع ابتدایی تمرین بیشتری در مبحث تقریب و تخمین اعداد داده می‌شود. Xenofontos و همکاران (۲۰۲۳) فرصت‌های مربوط به تخمین را در برنامه‌های درسی ابتدایی سه کشور مدیترانه شرقی (قبرس، یونان و ترکیه) بررسی کرده‌اند. Andrews و همکاران (۲۰۲۲) میزان پرداختن به تخمین در برنامه درسی دوره ابتدایی انگلستان (بریتانیا ۱ - انگلستان، ایرلند شمالی، اسکاتلند و ولز) را بررسی کرده‌اند و از تخمین زدن به عنوان یک شایستگی اساسی نام برده‌اند. چمن‌آرا (۱۳۹۷) در مجله برهان در به بحث و بررسی تقریب اعداد و تخمین به عنوان مطلبی برای افزایش دانش موضوعی معلمان پرداخته است. با توجه به پیشینه ارائه شده، ملاحظه می‌شود که مطالعه تحقیقی گسترده‌ای در حوزه بررسی تقریب و تخمین زدن در کتاب‌های دوره ابتدایی انجام نشده است. یکی دیگر از دلایلی که منجر به پژوهش حاضر شد تسلط پایین و عدم پاسخگویی مناسب دانشجومعلمان رشته آموزش ابتدایی به سوالات تقریب در کلاس‌های درسی دانشگاه بود، که نشان از عدم توجه کافی به این مبحث در دوران تحصیل آن‌ها داشت.

¹ Estimation

مبانی نظری:

دسته‌بندی انواع تخمین قبلاً به سه صورت بوده است: تخمین اندازه‌گیری، تخمین کمیت یا تعداد و تخمین محاسباتی (Sowder, 1992). امروزه، شکل چهارم تخمین یعنی تخمین محور اعداد^۱، به چشم‌اندازی آشنا در زمینه‌های روانشناسی شناختی، آموزش ریاضیات و آموزش نیازهای ویژه تبدیل شده است (Sayers et al., 2020a). در ادامه به بررسی مختصری از انواع تخمین می‌پردازیم.

تخمین اندازه‌گیری^۲:

تخمین اندازه‌گیری، به عنوان اندازه‌گیری بدون ابزار اندازه‌گیری تعبیر می‌شود (Sowder, 1992). تخمین در اندازه‌گیری می‌تواند در اندازه‌گیری طول، مساحت، حجم، جرم، زمان و ... مورد استفاده قرار بگیرد. به نظر می‌رسد که هم کودکان و هم بزرگسالان در تخمین‌های اندازه‌گیری ضعیف هستند (Joram et al., 1998)، و این می‌تواند نتیجه اجتناب معلمان از آموزش این نوع تخمین باشد. اما مطالعات نشان می‌دهد که مداخلات کلاس درس می‌تواند تخمین‌های اندازه‌گیری دانش‌آموزان را بهبود ببخشد (Hoth et al., 2019).

تخمین کمیت^۳:

تخمین کمیت (یا تعداد) به توانایی تشخیص تعداد اشیاء در یک مجموعه بدون استفاده از شمارش اشاره دارد (Crites, 1992). مهارت تخمین کمیت به توانایی شمارش وابسته است و با افزایش تعداد مجموعه اشیاء از دقت آن کاسته می‌شود (Smets et al., 2015). تخمین کمیت درک عددی دانش‌آموزان را بالا می‌برد. یعنی برای این که بتوانیم بدون انجام عمل شمردن، تعداد اشیاء را تخمین بزنیم و تعداد ما به تعداد واقعی آن اشیاء نزدیک باشد، باید نسبت به عددها، بزرگی و کوچکی آن‌ها و ترتیب آن‌ها درک خوبی داشته باشیم (چمن‌آرا، ۱۳۹۷).

تخمین محاسباتی^۴:

Dawker (۱۹۹۲) تخمین محاسباتی را "حدس زدن منطقی در مورد پاسخ‌های تقریبی به مسائل حسابی، بدون انجام دقیق یا قبل از انجام دقیق محاسبات" تعریف می‌کند. همچنین یک تعریف مختصر «یافتن یک پاسخ تقریبی برای مسائل حسابی بدون محاسبه واقعی (یا قبل) پاسخ دقیق است» (Lemaire et al., 2000). تخمین محاسبات اغلب مهم‌تر و کاربردی‌تر از محاسبه دقیق برای بسیاری از کاربردهای روزمره ریاضیات است، زیرا زمان و منابع توجه کمتری نسبت به محاسبه دقیق می‌طلبد، و بنابراین در شرایطی که منابع زمان یا توجه محدود است، می‌توان از آن استفاده کرد (Ganor-Stern, 2018). بنابراین، تخمین محاسباتی نه تنها یک مهارت ضروری زندگی است، بلکه تسهیل‌کننده مهمی برای درک دانش‌آموزان است (Ganor-Stern, 2016; Sekeris et al., 2019). تخمین محاسباتی در کودکان با افزایش سن، با توجه به یادگیری راهبردهای مختلف و افزایش تجربیات آن‌ها توسعه می‌یابد (Ganor-Stern, 2016).

¹ Number line estimation

² Measurement estimation

³ Quantity estimation

⁴ Computational estimation

تخمین محور اعداد^۱:

تخمین محور اعداد در واقع به معنی ترجمه یک عدد به موقعیت مکانی در یک محور اعداد است، یا به عبارت دیگر ترجمه موقعیت مکانی یک عدد روی یک محور اعداد است (Siegler et al., 2009). تخمین محور اعداد توانایی قرار دادن اعداد در یک خط فیزیکی است و ارتباط نزدیکی با مهارت‌های استدلال قیاسی هنگام تخمین دارد. تخمین محور اعداد به شدت با حل مسئله ریاضی مرتبط است (Zhu et al., 2017). ممکن است تصور شود که نقش تخمین محور اعداد در عملکرد دنیای واقعی یک فرد محدود است، اما در واقع تاثیر آن بر یادگیری ریاضی عمیق است. تخمین محور اعداد ابزاری درست برای رشد توانایی ریاضی در کودکان خواهد بود. در واقع، بسیاری از تحقیقات نشان داده‌اند که تخمین محور اعداد یک پیش‌بینی کننده مهم برای رشد توانایی ریاضی در دانش‌آموزان ابتدایی است (Schneider et al., 2009; Cohen & Sarnecka, 2014). همچنین، توانایی تخمین دقیق موقعیت کسرها روی محور اعداد یک پیش‌بینی کننده قوی برای آمادگی جبری و صلاحیت حل معادله است (Booth et al., 2014).

بین محاسبات ذهنی و تخمین زدن ارتباط وجود دارد (Dowker, 2003; McIntosh, 2004). اما دو ویژگی متمایز در محاسبات ذهنی وجود دارد، اول این که در محاسبات ذهنی به دنبال پاسخ دقیق هستیم و دوم این که این روش به صورت ذهنی و بدون استفاده از وسایلی مانند مداد و کاغذ انجام می‌شود. در واقع محاسبات ذهنی بخشی مهمی از تقریب است که سنگ بنای لازم برای فرآیندهای عددی متنوع مورد استفاده در محاسبات تقریبی را فراهم می‌کند (Reys, 1984). وقتی دانش‌آموز تخمین می‌زند، محاسبات ذهنی را هم انجام می‌دهد، در حالی که انجام محاسبات ذهنی به محاسبات تقریبی منجر نمی‌شود. برای مهارت تقریب و تخمین در اندازه‌گیری، تفکر فضایی و تفکر آماری نیز مورد نیاز است. اعداد تقریبی یک سیستم ذهنی است که مسئول نمایش و پردازش اطلاعات اعداد بزرگ است که به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا تخمین‌های عددی نادقیق را تشکیل دهند که در مقایسه‌های بزرگی و در یادگیری ریاضیات استفاده می‌شوند (Cai et al., 2018). تقویت مهارت‌های تقریب از طریق قرار دادن دانش‌آموزان در معرض مسائل شمارش و موقعیتی که آن‌ها باید قبل از محاسبه تقریب و تخمین بزنند، یک جنبه حیاتی در توسعه حس اعداد دانش‌آموزان دارد. در واقع، افزایش مهارت‌های تقریب با بهبود مهارت‌های محاسباتی ذهنی و ظرفیت تجسم فضایی مرتبط است (Russo, 2018).

با توجه به مطالب بیان شده و تاثیرات مثبتی که درک دانش‌آموزان دوره ابتدایی از تقریب و تخمین بر شکل‌گیری نگرش آن‌ها در زندگی روزمره دارد، و همچنین با توجه به این که کتاب‌های درسی به عنوان مهم‌ترین رایج‌ترین منبع آموزشی برای دانش‌آموزان هستند و به طور قابل توجهی بر آموزش و یادگیری دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارند؛ این پژوهش به تجزیه و تحلیل کتاب‌های درسی دوره ابتدایی در فعالیت‌های مبتنی بر تقریب و تخمین پرداخته است تا روند مفهوم‌سازی و ارائه مطالب مرتبط با این موضوع را در کتاب‌های درسی ریاضی مقطع ابتدایی استخراج و ارزیابی نماید. همچنین با این پژوهش به این سوال که آیا در آموزش ریاضی دوره ابتدایی ایران تقریب و تخمین جایگاه لازم که در برنامه درس ملی پیش‌بینی شده است را دارد یا خیر، پاسخ داده می‌شود.

روش

این پژوهش به روش تحلیل محتوا با رویکرد کمی-کیفی انجام گرفته است. جهت پاسخ دادن به سوال پژوهش و تعیین جایگاه تقریب و تخمین زدن در کتاب‌های درسی ریاضی پایه اول تا ششم ابتدایی از روش تحلیل Krippendorff (۱۹۸۰)، استفاده شد. Krippendorff تحلیل محتوا را تکنیکی پژوهشی می‌داند که به منظور استنباط تکرارپذیر و معتبر از داده‌ها در مورد متن آن‌ها به کار می‌رود. از آنجایی که مولفان کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی در پایه‌های مختلف یکسان نیستند و چارچوب محتوایی کتاب‌ها با هم متفاوت است، لذا کل محتوای کتاب‌ها مورد بررسی قرار

¹ Number line estimation

گرفت و نمونه‌گیری انجام نشد، لذا حجم جامعه با نمونه برابر است. در این پژوهش، کتاب‌های ریاضی مقطع ابتدایی چاپ سال ۱۴۰۱ به کار گرفته شده است. به منظور مشخص نمودن موقعیت‌های تقریب و تخمین ابتدا اهداف و محتوای آموزشی هر فصل از کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول تا ششم مقطع ابتدایی مورد بررسی قرار گرفت. مفاهیم، عبارت‌ها و واژه‌های کلیدی که مشخص کننده و مرتبط با تقریب و تخمین بودند تعیین شدند و روند پیشرفت این مفاهیم به تفکیک پایه‌های تحصیلی بررسی شد. این واژه‌ها و عبارت‌ها شامل: "تقریباً، به طور تقریبی، تقریباً بزدن، پاسخ‌های تقریبی، با تقریب رقم دهگان، با تقریب رقم صدگان، با تقریب رقم هزارگان، حذف کردن، نزدیک‌تر، حذف رقم یکان و قرار دادن صفر به جای آن، قرار دادن صفر به جای یکان یا دهگان عدد، بدون شمردن بگویید، گرد کردن، قطع کردن، اختلاف پاسخ‌های تقریبی و واقعی، حدس بزنید، در حدود، معنی اعداد تقریبی، برآورد مجموع، برآورد اختلاف، حاصل ضرب و تقسیم با استفاده از اعداد تقریبی" و عبارت‌هایی با مضمون‌های مشابه بود.

یافته‌ها

تجزیه و تحلیل کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول تا ششم ابتدایی در مورد مبحث تقریب و تخمین زدن به چهار طبقه سازمان‌دهنده دسته‌بندی شد که شامل: ۱- تخمین اندازه‌گیری، ۲- تخمین کمیت، ۳- تخمین محاسباتی، ۴- تخمین محور اعداد، است. سپس به بررسی کلیه مطالب کتاب‌های مورد بررسی، شامل فعالیت، کاردرکلاس، تمرین، مرور فصل، فرهنگ نوشتن، فرهنگ خواندن، معما و سرگرمی و سایر قسمت‌های کتاب‌های درسی ریاضی به تفکیک پایه‌ها، پرداخته شد. نمونه موقعیت‌های شناسایی شده در کتاب‌ها در ارتباط با تخمین زدن در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱- نمونه موقعیت‌های تقریب و تخمین زدن در کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی

ردیف	طبقه بندی	نمونه محتوا
۱	تخمین اندازه‌گیری	اندازه‌ی خط‌های زیر را حدس بزنید و کنار آن بنویسید. ۳ شیء را نام ببرید که طول آن‌ها در حدود یک متر باشد. ۴- طول قدم خود را ابتدا حدس بزنید - سپس اندازه‌ی قدم خود را با یک ابزار مناسب محاسبه و با حدس خود مقایسه کنید. - هرگاه یک کیلومتر پیاده‌روی کنید به‌طور تقریبی چند قدم برداشته‌اید؟ اگ دست خود را روی مریخ‌های زیر بگذارید و دور آن را خط بکشید. مساحت کف دست شما تقریباً ... سانتی‌متر مربع است. هر شکل به‌طور تقریبی چه کسری را نشان می‌دهد؟
۲	تخمین کمیت	در کدام قسمت تعداد شکل‌ها بیشتر از ۲۰ تا است؟ ☒ بزنید. حالا شکل‌ها را بشمارید. آیا حدس شما درست بود؟ دبستان شما حدوداً چند دانش‌آموز دارد؟ در این قندان در حدود ... قند است.

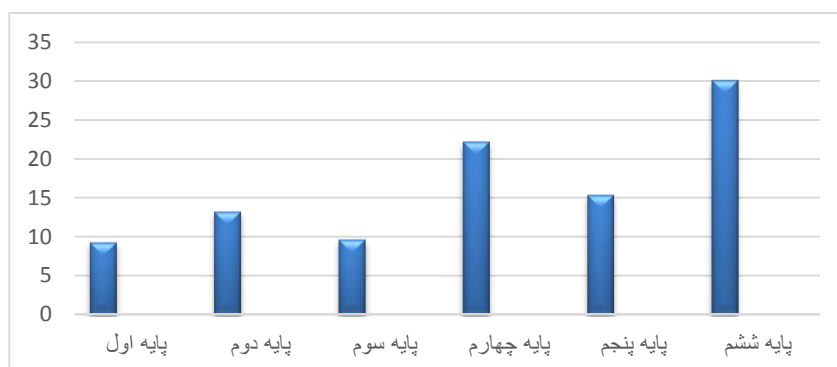
	در یک گونی برنج ۲۰ کیلوگرمی به طور تقریبی چند دانه برنج وجود دارد؟ حساب کنید. - در ۱۰ گرم ۵۰ دانه برنج - در ۱۰۰۰ گرم (یک کیلوگرم) _____		
مقدار تقریبی عبارت‌ها را به دست آورید. تقریب را با توجه به رقم دهگان در نظر بگیرید و هر عدد را به نزدیک‌ترین ده تایی بنویسید. $47 \times 23 \rightarrow 50 \times 20 =$ $51 + 67 \rightarrow$ ۴- جاهای خالی را پر کنید. $\frac{3}{141} + \frac{2}{761} \xrightarrow{\text{تقریب کمتر از } \frac{1}{8} \text{ با روش قطع کردن}} \frac{3}{141} + \frac{2}{761} \xrightarrow{\text{تقریب کمتر از } \frac{1}{8} \text{ با روش گرد کردن}}$ پاسخ‌ها را با هم مقایسه کنید. $\frac{4}{7} + \frac{3}{1} =$ به طور تقریبی $\rightarrow$ نزدیک‌ترین عدد	تخمین محاسباتی	۳	
تقریب اعداد فصلیت ۱- با توجه به محور، عددهای داده شده را به صورت تقریبی نشان دهید. 27 $27, 429, 105, 227, 807$ $920, 2250, 4781, 6099$ $1050, 1170, 1430, 1685$ ۳- جای تقریبی عدد $4/256$ را روی هر یک از محورهای زیر مشخص کنید. $0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$ $4 \quad 4/1 \quad 4/2 \quad 4/3 \quad 4/4$ $4/24 \quad 4/25 \quad 4/26 \quad 4/27$ ۳- محل تقریبی هر یک از اعداد زیر را بر روی محور نمایش دهید. - فاصله‌ی زمین تا خورشید (کیلومتر) $149,000,680$ - افراد محروم از دسترسی به آب آشامیدنی سالم در جهان $675,725,402$ - تعداد دوجرخه‌های تولید شده در جهان طی یک سال $3,215,475$ $0 \quad 200 \text{ میلیون} \quad 100 \text{ میلیون}$	تخمین محور اعداد	۴	

نتایج به دست آمده از بررسی و تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی در مقطع ابتدایی با توجه به دسته‌بندی انواع تخمین زدن به تفکیک پایه تحصیلی در جدول ۲ ارائه شده است. داده‌های جدول ۲ نشان می‌دهد که موقعیت‌های تخمین در همه‌ی کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی وجود دارد.

جدول ۲- فراوانی و درصد فراوانی موقعیت‌ها مبتنی بر تخمین زدن در کتاب‌های پایه اول تا ششم ابتدایی

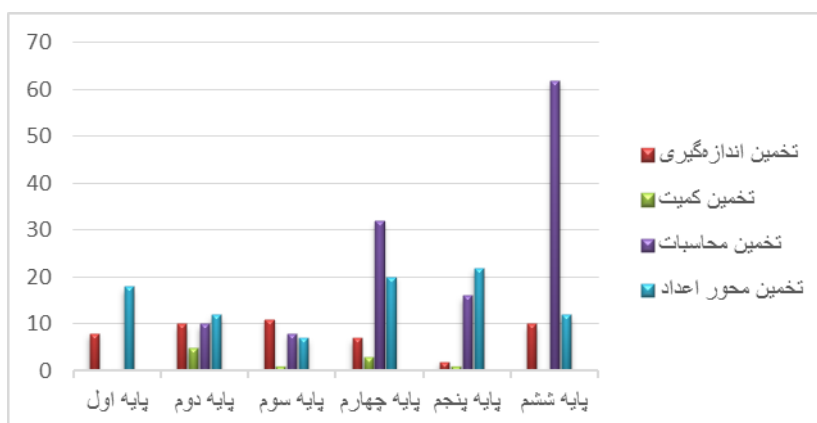
تخمین اندازه‌گیری	تخمین کمیت	تخمین محاسبات	تخمین محور اعداد	جمع
تعداد درصد	تعداد درصد	تعداد درصد	تعداد درصد	
پایه اول	۸	۰	۱۸	۲۶ / ۹/۳۱ %
پایه دوم	۱۰	۵	۱۲	۳۷ / ۱۳/۲۶ %
پایه سوم	۱۱	۱	۷	۲۷ / ۹/۶۷ %
پایه چهارم	۷	۳	۲۰	۶۲ / ۲۲/۲۲ %
پایه پنجم	۴	۱	۲۲	۴۳ / ۱۵/۴۱ %
پایه ششم	۱۰	۰	۱۲	۸۴ / ۳۰/۱۰ %
جمع	۵۰	۱۰ / ۳/۵۸ %	۱۲۸ / ۴۵/۸۷ %	۹۱ / ۳۲/۶۱ %

نتایج به دست آمده در جدول ۲ در نمودار ۱ به صورت تصویری روند موقعیت‌های تقریب و تخمین در پایه‌های اول تا ششم ابتدایی را به درصد نشان می‌دهد.



نمودار ۱- درصد فراوانی موقعیت‌های تخمین در کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی

همچنین نتایج به دست آمده از جدول ۲ در نمودار ۲ روند توجه به تخمین اندازه‌گیری، تخمین کمیت، تخمین محاسبات و تخمین محور اعداد را در پایه‌های اول تا ششم ابتدایی نشان می‌دهد.



نمودار ۲- فراوانی موقعیت‌های انواع تخمین در کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی

نتایج به دست آمده از بررسی کتاب‌های ریاضی در مقطع ابتدایی نشان می‌دهد که شروع آموزش مفهوم تقریب را می‌توان از پایه اول ابتدایی دانست. توجه به این نکته مهم است که دانش‌آموزان از سال اول ابتدایی با تقریب آشنا می‌شوند و این امر تاثیر مهمی در روند یادگیری تقریب و استفاده از آن در زندگی واقعی خواهد داشت. کتاب درسی ریاضی اول ابتدایی دارای ۲۶ موقعیت تقریب است. تعداد موقعیت‌های مربوط به تخمین اندازه‌گیری ۸ مورد است. از این تعداد ۳ مورد از دانش‌آموزان خواسته شده است که طول یک شیء را تخمین بزنند، ۴ مورد از دانش‌آموزان خواسته شده است که زمان را روی ساعت تقریب بزنند، ۱ مورد تقریب هم مربوط به مقایسه تقریبی جرم وجود دارد. همچنین در این کتاب محور اعداد معرفی شده است و ۱۸ مورد استفاده از محور اعداد برای تعیین محل اعداد روی محور و جمع و تفریق اعداد روی محور وجود دارد. در این کتاب هیچ موقعیت تخمین کمیت یا محاسبات تقریبی وجود ندارد. البته در پایه اول ابتدایی با توجه به این که دانش‌آموز در شروع یادگیری اعداد و محاسبات قرار دارد، نبود موقعیت‌های تقریب محاسباتی طبیعی به نظر می‌رسد.

کتاب درسی ریاضی پایه دوم ابتدایی شامل ۳۷ موقعیت تخمین است. از این تعداد در ۱۰ مورد مربوط به تخمین اندازه‌گیری طول و زمان و ۵ مورد مربوط به تخمین کمیت به ویژه در زندگی روزمره است. همچنین از موقعیت‌های تقریب در کتاب پایه دوم ۱۰ مورد مربوط به تخمین محاسبات با اعداد طبیعی دو رقمی و سه رقمی و ۱۲ مورد از موقعیت‌ها مربوط به تخمین محور اعداد مربوط به اعداد طبیعی دو رقمی و سه رقمی وجود دارد. همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، کتاب درسی پایه دوم نسبت به سایر پایه‌ها به نسبت یکنواخت‌تری به همه مولفه‌های تخمین پرداخته است.

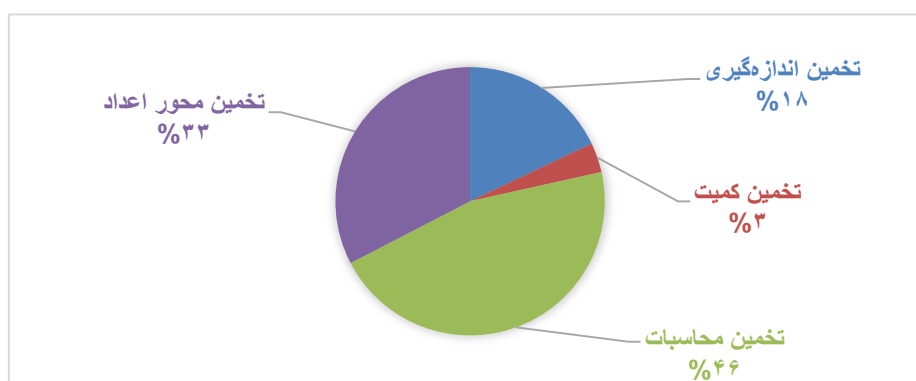
کتاب درسی ریاضی پایه سوم ابتدایی دارای ۲۷ موقعیت تقریب است که از این تعداد ۱۱ مورد به تخمین اندازه‌گیری، ۱ مورد به تخمین کمیت، ۸ مورد تخمین محاسبات و در نهایت ۷ مورد به تخمین محور اعداد پرداخته است. تخمین محاسبات در پایه دوم مربوط به اعداد طبیعی تا چهار رقم می‌باشد. تخمین محور اعداد در این پایه بیشتر مربوط به اعداد کسری ساده و حاصل‌ضرب اعداد یک رقمی در یک رقمی است.

کتاب درسی ریاضی پایه چهارم ابتدایی نسبت به پایه‌های قبلی بیشتر به تقریب پرداخته است، در این کتاب یک درس با عنوان "محاسبه‌های تقریبی" به موقعیت‌های تقریب اختصاص یافته است. در کل، این کتاب دارای ۶۲ موقعیت تقریب است که از این تعداد ۷ مورد به تخمین اندازه‌گیری، شامل اندازه‌گیری طول، زمان و مساحت است. همچنین ۳ مورد تخمین کمیت و ۳۲ مورد تخمین محاسبات در این کتاب مشاهده شد که تقریب محاسبات این پایه بیشتر مربوط به تقریب اعداد و ضرب و تقسیم اعداد دو رقمی و سه رقمی است. به‌علاوه ۲۰ مورد موقعیت تخمین محور اعداد در این پایه وجود دارد که مربوط به اعداد شش رقمی و اعداد کسری و اعشاری است.

کتاب درسی ریاضی پایه پنجم ابتدایی، مانند کتاب پایه دوم و سوم، در برخی قسمت‌های کتاب درسی به تقریب پرداخته است، در این کتاب درس یا فصل جداگانه‌ای به تقریب اختصاص نیافته است. این کتاب دارای ۴۳ موقعیت تقریب است که از این تعداد ۴ مورد به تخمین اندازه‌گیری و ۱ مورد تخمین کمیت، ۱۶ مورد تخمین محاسبات اشاره دارد. تخمین محاسبات در این پایه مربوط به تقریب اعداد ۷ رقمی و محاسبات تقریبی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم که مرور پایه‌های قبلی است و همچنین محاسبات تقریبی با اعداد اعشاری است. همچنین در این کتاب ۲۲ مورد تخمین محور اعداد مشاهده شد که به نمایش اعداد ۱۰ رقمی (میلیارد)، اعداد کسری، اعداد مخلوط و پیدا کردن حاصل جمع این اعداد با استفاده از محور پرداخته است.

کتاب درسی ریاضی پایه ششم ابتدایی نقطه اوج مبحث تقریب و تخمین در دوره ابتدایی است. در این کتاب فصل هفتم کتاب، که ۱۳ صفحه از کتاب ۱۴۴ صفحه‌ای است، به تقریب و محاسبات تقریبی اختصاص یافته است. در این فصل دانش‌آموز با روش‌های گرد کردن و قطع کردن برای تقریب اعداد آشنا شده و همچنین تقریب کسرها را نیز با روش‌های ذکر شده یاد می‌گیرند. در قسمت محاسبات تقریبی نیز مثال‌های فراوانی از محاسبات تقریبی اعداد طبیعی و کسری و اعشاری وجود دارد. این کتاب شامل ۸۴ موقعیت تقریب است که از این تعداد ۱۰ مورد به تخمین اندازه‌گیری، شامل

اندازه‌گیری طول، جرم، مساحت و حجم پرداخته است. در این کتاب ۶۱ مورد تخمین محاسباتی که شامل تقریب اعداد طبیعی، کسری و اعداد اعشاری و همچنین محاسبات تقریبی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و همچنین محاسبات تقریبی با اعداد اعشاری و کسرها و اعداد مخلوط هستند، وجود دارد. به علاوه، در این کتاب ۱۱ مورد تخمین محور اعداد مشاهده شد که به نمایش اعداد کسری، اعشاری و اعداد منفی و پیدا کردن حاصل جمع این اعداد با استفاده از محور پرداخته است. همان طور که در نمودار شماره ۳ نشان داده شده است، با مقایسه درصد فراوانی هر کدام از مولفه‌ها در همه پلوه‌ها، ملاحظه می‌شود که تخمین محاسبات با $45/87\%$ بیشترین سهم و تخمین کمیت با $3/58\%$ کمترین سهم از موقعیت‌های تقریب و تخمین را داراست. این در حالی است که تخمین کمیت فارغ از رشته تحصیلی و شغل افراد، برای زندگی روزمره بسیار کاربردی و مورد نیاز است.



نمودار ۳- درصد فراوانی موقعیت‌های انواع تخمین در کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی

در موقعیت‌های مختلف تقریب و تخمین مطرح شده در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی به تخمین مفاهیم مختلفی که دانش‌آموز در کتاب‌های دوره ابتدایی با آن‌ها آشنا می‌شود پرداخته شده است. این مفاهیم شامل: طول، مساحت، حجم، جرم، زمان، شمارش و تقریب اعداد (طبیعی، کسری، اعشاری) است. که فراوانی هر کدام از آن‌ها در پایه‌های اول تا ششم ابتدایی به تفکیک پایه در جدول شماره ۳ نشان داده شده است.

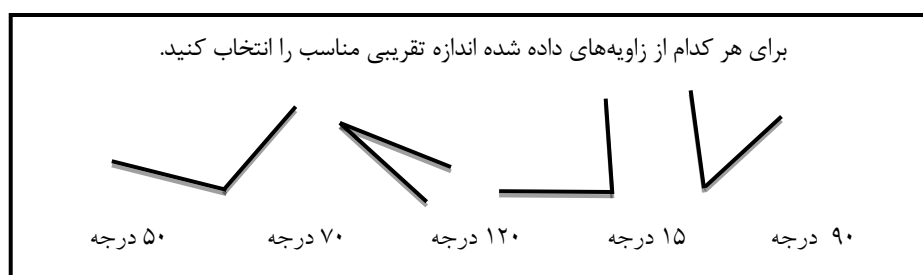
جدول ۳- فراوانی موقعیت‌های مبتنی بر تخمین زدن طول، مساحت و ... در کتاب‌های ریاضی ابتدایی

	تقریب طول	تقریب زمان	تقریب جرم	تقریب مساحت	تقریب حجم	تقریب شمارش	تقریب اعداد
پایه اول	۳	۴	۱	۰	۰	۰	۰
پایه دوم	۶	۱	۰	۰	۰	۵	۱۲
پایه سوم	۴	۰	۲	۴	۰	۲	۶
پایه چهارم	۱	۵	۰	۱	۰	۵	۱۲
پایه پنجم	۲	۰	۱	۰	۱	۱	۷
پایه ششم	۸	۰	۴	۶	۳	۰	۲۸
جمع	۲۴	۱۰	۸	۱۱	۴	۱۳	۶۵
درصد	۱۷/۷۷	۷/۴	۵/۹۲	۸/۱۴	۲/۹۶	۹/۶۲	۴۸/۱۴

داده‌های جدول ۳ نشان می‌دهد که به تدریج با آشنا شدن دانش‌آموز با مفاهیم جدید در کتاب‌های درسی، موقعیت‌هایی نیز برای تخمین این مفاهیم در کتاب‌های درسی ریاضی مطرح شده است. اما از جمله مفاهیم دیگری که دانش‌آموزان با آن‌ها در دوره ابتدایی آشنا می‌شوند، مفهوم دما (درجه حرارت)، زاویه و محورهای مختصات است. ولی برای این مفاهیم هیچ موقعیت تقریب و تخمین در کتاب‌های درسی دوره ابتدایی وجود ندارد.

محورهای مختصات را می‌توان به نوعی تعمیم محور اعداد در دو بعد دانست. بنابراین با توجه مطالبی که در مورد تخمین محور اعداد در بخش‌های دیگر این مقاله بیان شده است و نیز اهمیتی که محور مختصات در ریاضیات مقاطع بالاتر دارد، توجه به این نوع تخمین نیز ضروری می‌نماید.

همچنین در شکل ۱ مثالی از طراحی فعالیت مبتنی بر تقریب برای مفهوم زاویه مناسب برای پایه پنجم یا ششم ابتدایی پیشنهاد شده است.



شکل ۱- نمونه طراحی فعالیت مبتنی بر تقریب زاویه

توانمندسازی دانش‌آموزان در محاسبات تقریبی و به کار بردن ریاضیات در حل مسائل روزمره و امور انتزاعی بر اساس سند برنامه درسی ملی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. طی بررسی انجام شده در محتوای کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی در مورد مطالب مربوط به تقریب، مشاهده شد که در برخی از سوالات از مسائل دارای زمینه در زندگی واقعی استفاده شده است که نمونه‌هایی از آن‌ها در شکل ۲ و ۳ آمده است. این گونه سوالات باعث آشنایی بیشتر دانش‌آموزان با کاربردهای تقریب در زندگی واقعی و ایجاد انگیزه برای یادگیری بهتر این مبحث می‌شود.



شکل ۲- الف) ریاضی اول دبستان (صفحه ۱۶۸) ب) ریاضی دوم دبستان (صفحه ۶۶)



شکل ۳- ریاضی چهارم دبستان (۱۴۰۱) - صفحه ۸۷

در اینجا چند کاربرد ساده و مفید از تقریب و تخمین برای دانش‌آموزان دوره ابتدایی را نیز اشاره می‌کنیم که با افزودن به کتاب‌های درسی می‌تواند در زندگی روزمره دانش‌آموزان مفید باشد.

خرید در فروشگاه: وقتی دانش‌آموزان با پدر و مادر خود به خرید می‌روند، می‌توانند قیمت کل خرید را با گرد کردن قیمت‌ها به نزدیک‌ترین هزار تومان تخمین بزنند. این کمک می‌کند تا مفهوم جمع و تفریق را بهتر درک کنند.

زمان‌سنجی: دانش‌آموزان می‌توانند زمان تقریبی انجام فعالیت‌های روزمره مانند خواندن یک کتاب یا انجام تکالیف مدرسه را تخمین بزنند. این کار به آن‌ها کمک می‌کند تا مدیریت زمان را یاد بگیرند.

اندازه‌گیری فاصله: هنگام پیاده‌روی یا دوچرخه‌سواری، دانش‌آموزان می‌توانند فاصله تقریبی تا مقصد را با استفاده از تخمین محور اعداد حدس بزنند. این تمرین به آن‌ها کمک می‌کند تا مفهوم فاصله و اندازه‌گیری را یاد بگیرند.

نکته مهم دیگری که در مبحث تخمین و تقریب کتاب‌های درسی مغفول مانده است، مفهوم و اهمیت خطای این تقریب‌هاست. به این معنا که وقتی از دانش‌آموز می‌خواهیم تخمینی برای یک کمیت ارائه دهد تا چه میزان اختلاف با مقدار واقعی مورد قبول است. مثلاً دانش‌آموزی طول کلاس ۱۰ متری را ۹ متر تخمین می‌زند و دانش‌آموز دیگری طول درب کلاس ۲ متری را ۱ متر تخمین می‌زند. هر دو به اندازه ۱ متر اختلاف (خطای مطلق) در تخمین‌شان دارند ولی نسبت خطای تخمین دانش‌آموز اولی به اندازه واقعی برابر یک دهم (۱۰ درصد خطا) و دانش‌آموز دومی یک دوم (۵۰ درصد خطا) است. این نشان می‌دهد دقت اولی بسیار بیشتر از دومی بوده است. بهتر است کتاب‌های درسی با طراحی فعالیت‌هایی به آموزش خطا و دامنه مورد قبول برای تخمین ارائه شده نیز بپردازد.

بحث و نتیجه‌گیری

نتایج این پژوهش حاکی از این است که در کتاب‌های درسی ریاضی مقطع ابتدایی سعی شده است دانش‌آموزان با مفهوم تقریب و تخمین آشنا شوند و بتوانند از آن در تخمین جواب‌های مساله‌ها استفاده نمایند. مطالعات بین‌المللی نشان می‌دهند که دانش‌آموزان ممکن است با درک و شایستگی پایینی از تخمین و محاسبات تقریبی از مدرسه فارغ التحصیل شوند (Andrews et al., 2022). اما با آموزش این مفهوم و تاکید بر یادگیری آن در دوران تحصیل می‌توان این درک و شایستگی را توسعه داد.

پژوهش Xenofontos و همکاران (۲۰۲۳) نشان می‌دهد که هر سه برنامه درسی قبرس، یونان و ترکیه نیز توجه کافی به اهمیت تخمین کمیت و همچنین به تخمین محور اعداد نداشته‌اند، درحالی‌که این دو شکل تخمین پیامدهای مهمی در رشد یادگیری بعدی سایر مفاهیم ریاضی و حوزه‌های ریاضی دارند. نتیجه پژوهش Andrews و همکاران (۲۰۲۲) بیانگر عدم وجود فرصت‌های کافی برای تخمین، و به‌ویژه برای تخمین کمیت در برنامه درسی دوره ابتدایی انگلستان (بریتانیا - انگلستان، ایرلند شمالی، اسکاتلند و ولز) است. همچنین مطالعه دیگری نشان می‌دهد که کتاب‌های ریاضیات فنلاند، سنگاپور و سوئد نیز در توجه سیستماتیک به تقریب و تخمین ضعیف عمل کرده‌اند (Sayers et al., 2020b). پژوهش یافتیان و عباسی (۱۴۰۱) نیز به محدود بودن موقعیت‌های مربوط به بررسی تقریب و تخمین به یک فصل و چند تمرین در برنامه درسی ژاپن اشاره دارد. در مجموع، یافته‌ها نشان می‌دهند که در سطح بین‌المللی، توجه کافی به شایستگی و مهارت تقریب و تخمین نشده است و این ممکن است مانع رشد ریاضی دانش‌آموزان شود. طبق یافته‌های این پژوهش با بررسی تعداد موقعیت‌های مربوط به تقریب و تخمین در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی خوشبختانه می‌توان گفت که مولفان به این مبحث که یکی از اهداف برنامه درسی حوزه یادگیری ریاضی است، توجه لازم را داشته‌اند ولی موقعیت‌های موجود بیشتر در راستای تخمین محاسبات و محور اعداد بوده و به تخمین اندازه‌گیری و کمیت، کمتر پرداخته‌اند. به علاوه در بین پایه‌های مختلف میزان موقعیت‌های تخمین موجود در پایه اول و سوم کم‌رنگ‌تر است.

بررسی ارتباط طولی مفاهیم مربوط به مبحث تقریب و تخمین در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی نشان می‌دهد که مولفان تلاش نموده‌اند با ورود به اکثر مباحث ریاضی مطرح شده در کتاب‌های درسی دوره ابتدایی، مانند طول، مساحت، حجم، جرم، زمان، شمارش و تقریب اعداد، در مورد تقریب و برآوردهای ذهنی لازم برای آن مفهوم موقعیت‌هایی

را ارائه نمایند. دانش‌آموزان از پایه اول ابتدایی که با مفهوم عدد، شمارش و محور اعداد آشنا می‌شوند با مثال‌هایی از تقریب آن‌ها نیز روبرو می‌شوند. در پایه دوم ابتدایی نیز دانش‌آموزان با مفهوم حذف کردن مرتبه‌ها و نزدیک‌تر بودن اعداد به اعداد دیگر از طریق جدول ارزش مکانی و محور اعداد آشنا می‌شوند و به تدریج با افزایش پایه تقریب را برای اعداد طبیعی با رقم‌های بیشتر، اعداد کسری و اعداد اعشاری به کار می‌برند و روش‌های تقریب زدن و برآورد مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و تقسیم با استفاده از اعداد تقریبی را یاد می‌گیرند. در مجموع می‌توان گفت نتایج نمودار ۲ و نمودار ۳ نشان می‌دهد که ارائه مفهوم تقریب و تخمین بخشی از اهداف آموزشی کتاب‌های درسی ریاضی در مقطع ابتدایی است، اما این توجه به ویژه در مولفه تخمین کمیت و در درجه دوم در تخمین اندازه‌گیری کافی نیست و با توجه به کاربردی بودن تخمین کمیت و تخمین اندازه‌گیری در زندگی روزمره نیاز هست دانش‌آموزان امروز به عنوان شهروندان فردا با مثال‌های بیشتری از تخمین کمیت و تخمین اندازه‌گیری در کتاب‌های درسی آشنا شوند تا توانایی استفاده از انواع مختلف تخمین را در ذهن خود توسعه دهند. به علاوه در کتاب‌های درسی به تقریب مفاهیمی مانند دما، زاویه و محورهای مختصات پرداخته نشده است. بنابراین پیشنهاد می‌شود مولفان محترم در ویرایش‌های بعدی کتاب‌های درسی موارد مطرح شده را مورد توجه قرار دهند.

برای مطالعات بیشتر به علاقه‌مندان توصیه می‌شود در پژوهش‌هایی میزان یادگیری دانش‌آموزان از این مبحث و شیوه‌های ارائه تدریس این مبحث توسط دبیران و حتی میزان آشنایی خود دبیران با تقریب و تخمین بررسی شود. به علاوه پیشنهاد می‌شود در آموزش دانشجومعلم و حتی در دوره‌های ضمن خدمت معلمان به اهمیت این موضوع تاکید شود تا آن‌ها ضمن فراگیری درست این مباحث، در کلاس‌های درس نیز فقط به مثال‌های کتاب اکتفا ننموده و به بیان مثال‌هایی از اشیاء و موقعیت‌های موجود در کلاس و مواردی که دانش‌آموزان در زندگی روزمره سروکار دارند نیز مبادرت ورزند.

مشارکت نویسندگان

نویسندگان در این تحقیق مشارکت برابر داشتند.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است»

منابع

- برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، ۱۳۹۱.
- جرمی کیل پاتریک، جین سوافورد. (۲۰۰۷). کمک کنیم کودکان ریاضی یاد بگیرند. ترجمه: مهدی بهزاد و زهرا گوید (۱۳۸۷). تهران: موسسه فرهنگی فاطمی.
- چمن‌آرا، سپیده. (۱۳۹۷). اعداد تقریبی و تخمین. رشد آموزش ابتدایی. دوره ۲۲، شماره ۴. ص ۸-۱۱.
- چمن‌آرا، سپیده. (۱۳۹۷). اعداد تقریبی و تخمین. رشد آموزش ابتدایی. دوره ۲۲، شماره ۵. ص ۸-۱۰.
- کریپندورف، کلوس. (۱۳۹۸). تحلیل محتوا: مبانی روش‌شناسی. ترجمه: هوشنگ نایی. نشر نی.
- یافتیان، نرگس و عباسی، فاطمه (۱۴۰۱). تحلیل مقایسه‌ای مفاهیم ارائه شده در کتاب‌های درسی ریاضی مقطع ابتدایی ایران و ژاپن. پژوهش‌های برنامه درسی. دوره دوازدهم، شماره دوم، پیاپی، ۲۴ صفحه ۱۵۲-۱۲۲.

References

- Andrews, P., Xenofontos, C., & Sayers, J. (2022). Estimation in the primary mathematics curricula of the United Kingdom: Ambivalent expectations of an essential competence. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(8), 2199–2225. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1868591>

- Booth, J., Newton, K., & Twiss-Garrity, L. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 118, 110–118. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.09.001>
- Cai, D., Zhang, L., Li, Y., Wei, W., & Georgiou, G. K. (2018). The role of approximate number system in different mathematics skills across grades. *Frontiers in Psychology*, 9, Article 1733. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01733>
- Chaman-Ara, S. (2018). Approximate numbers and estimation. *Growth of Elementary Education*, 22(4), 8-11. [In Persian]
- Chaman-Ara, S. (2018). Approximate numbers and estimation. *Growth of Elementary Education*, 22(5), 8-10. [In Persian]
- Cohen, D. J., & Sarnecka, B. W. (2014). Children's number-line estimation shows development of measurement skills (not number representations). *Developmental Psychology*, 50(6), 1640–1652. <https://doi.org/10.1037/a0035901>
- Crites, T. (1992). Skilled and less skilled estimators' strategies for estimating discrete quantities. *The Elementary School Journal*, 92(5), 601-619. <https://doi.org/10.1086/461709>
- Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 45–55. <https://doi.org/10.2307/749163>
- Dowker, A. (2003). Young children's estimates for addition: The zone of partial knowledge and understanding. In A. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructive adaptive expertise* (pp. 243–266). Lawrence Erlbaum Associates.
- Ganor-Stern, D. (2016). Solving math problems approximately: A developmental perspective. *PLOS ONE*, 11(5), e0155515. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0155515>
- Ganor-Stern, D. (2018). Do exact calculation and computation estimation reflect the same skills? Developmental and individual differences perspectives. *Frontiers in Psychology*, 9, Article 1316. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01316>
- Hoth, J., Heinze, A., Weiher, D., Ruwisch, S., & Huang, H. (2019). Primary school students' length estimation competence—A cross-country comparison between Taiwan and Germany. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Opportunities in learning and teaching elementary mathematics* (pp. 201–211). Charles University.
- Joram, E., Subrahmanyam, K., & Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research*, 68(4), 413-449. <https://doi.org/10.3102/00346543068004413>
- Kenedi, A. K., Helsa, Y., Ariani, Y., Zainil, M., & Hendri, S. (2019). Mathematical connection of elementary school students to solve mathematical problems. *Journal on Mathematics Education*, 10(1), 69-80. <https://doi.org/10.22342/jme.10.1.5416.69-80>
- Kilpatrick, J., & Swafford, J. (2007). *Helping children learn mathematics*. National Academies Press. (M. Behzad & Z. Goya, Trans.; 2008) [In Persian]. Fatemi Cultural Institute.
- Krippendorff, K. (2018). *Content analysis: An introduction to its methodology* (4th ed.). SAGE Publications. (H. Naebi, Trans.; 2019) [In Persian]. Nashr-e Ney.
- Lemaire, P., Lecacheur, M., & Farioli, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54 (2), 141–148. <https://doi.org/10.1037/h0087336>
- McIntosh, A. (2004). Where we are today. In A. McIntosh & L. Sparrow (Eds.), *Beyond written computation* (pp. 3–14). MASTEC.
- Mildenhall, P. (2016). Estimation in the primary school: developing a key mathematical skill for life. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 21(1), 18-22.
- Ministry of Education of Iran. (2012). *National curriculum of the Islamic Republic of Iran*. [In Persian]
- Reys, L. H. (1984). Affective Variables and Mathematics Education. *Elementary School Journal*, 84(5), 547–557. <https://doi.org/10.1086/461384>
- Russo, J. (2018). Dynamic estimation: A guided approach to refining student estimates. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 23(3), 4-7.

- Sayers, J., Petersson, J., Rosenqvist, E., & Andrews, P. (2020a). Estimation: An inadequately operationalised national curriculum competence. In R. Marks (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 40(2).
- Sayers, J., Petersson, J., Rosenqvist, E., & Andrews, P. (2020b). Opportunities to learn foundational number sense in three Swedish year one textbooks: Implications for the importation of overseas-authored materials. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1688406>
- Schneider, M., Grabner, R. H., & Paetsch, J. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: Their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, 101(2), 359–372. <https://doi.org/10.1037/a0013840>
- Sekeris, E., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2019). Measurement, development, and stimulation of computational estimation abilities in kindergarten and primary education: A systematic literature review. *Educational Research Review*, 27, 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2019.01.002>
- Siegler, R., Thompson, C., & Opfer, J. E. (2009). The Logarithmic-to-Linear Shift: One Learning Sequence, Many Tasks, Many Time Scales. *Mind, Brain, and Education*, 3(3), 143-150. <https://doi.org/10.1111/j.1751-228X.2009.01064.x>
- Smets, K., Sasanguie, D., Szűcs, D., & Reynvoet, B. (2015). The effect of different methods to construct non-symbolic stimuli in numerosity estimation and comparison. *Journal of Cognitive Psychology*, 27(3), 310–325. <https://doi.org/10.1080/20445911.2014.996568>
- Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–389). National Council of Teachers of Mathematics.
- Xenofontos, C., Alkan, S. H., & Andrews, P. (2023). Estimation in the Primary Mathematics Curricula of Cyprus, Greece and Turkey: A Privileged or Prevented Competence? *Athens Journal of Education*, 10(1), 117-138. <https://doi.org/10.30958/aje.10-1-7>
- Yaftian, N., & Abbasi, F. (2022). A comparative analysis of the concepts presented in the mathematics textbooks of the elementary level in Iran and Japan. *Curriculum Planning Research*, 12(2), 122-152. [In Persian]
- Zhu, M., Cai, D., & Leung, A. (2017). Number Line Estimation Predicts Mathematical Skills: Difference in Grades 2 and 4. *Frontiers in Psychology*, 8, 1576. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01576>