Educational and Scholastic Studies *http://pma.cfu.ac.ir/*
Vol. 11, No. 2, Summer 2022 *Print ISSN: 2423-494X*
pp. 353- 387 *Online ISSN: 2645-8098*

Investigating of Different Apprehensions of Secondary school Students When Confronting Geometric Figures

Sima Rabbi[1], Nasim Asghary[2*]

1. Department of Mathematics and Statistics, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
2. Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Congruent Technologies, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

(Received: December 14, 2020; Accepted: February 27, 2021)

Abstract

Representation is one of the appropriate tools for displaying the relationship between the components of a concept or a situation. However, any representation cannot completely describe a mathematical concept and can only provide information regarding some aspects of that concept. Solving a geometrical task often requires interaction among these three types of apprehension (perceptual, operative, and discursive) and recognition of their differences. This study aims to investigate middle school students' apprehensions about confronting geometrical figures when doing geometry homework. Thus, a case study was designed. To this end, a test based on Duval (1998) was given to 305 students of the ninth, tenth, and eleventh grades. Qualitative analysis of the answers based on Duval's cognitive argument indicated that most of the students use perceptual apprehension more than operative apprehension to solve the problems. Further, teaching geometry regarding cognitive apprehensions can help students to promote from the natural path of looking at a geometrical figure to the mathematical one. Therefore, the findings of this study can shed light on the in-service training of teachers.

Keywords: Geometry education, Operative apprehension, Perceptual apprehension, Representation, Secondary School.

* **Corresponding Author, Email:** nas.asghari@iauctb.ac.ir

مطالعات آموزشی و آموزشگاهی
دورهٔ ۱۱، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۴۰۱
صفحات ۳۸۷ ـ ۳۵۳

http://pma.cfu.ac.ir/
شاپای چاپی: ۲۴۲۳-۴۹۴X
شاپای الکترونیکی: ۲۶۴۵-۸۰۹۸

بررسی انواع درک‌های دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه در مواجهه با شکل هندسی

سیما ربی[۱]، نسیم اصغری[۲*]

۱. گروه ریاضی و آمار، واحد تهران‌مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
۲. گروه ریاضی و آمار، دانشکدهٔ علوم و فناوری های همگرا، واحد تهران‌مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۰۹)

چکیده

بازنمایی، یکی از ابزارهای مناسب برای نمایش روابط بین اجزای یک مفهوم یا موقعیت است، اما هر بازنمایی نمی‌تواند یک مفهوم ریاضی را به‌طور کامل شرح دهد، بلکه فقط اطلاعاتی راجع به جنبه‌هایی از آن مفهوم را نشان می‌دهد. حل یک مسئلهٔ هندسی، اغلب اوقات نیازمند تعامل بین این سه درک (اجمالی، عاملی و استدلالی) و تشخیص تمایز آن‌ها از یکدیگر است. این مطالعه بر آن است که چگونگی درک‌های اجمالی و عاملی دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه در مواجهه با شکل هندسی را هنگام انجام تکالیف هندسی بررسی کند، بدین منظور طی یک مطالعهٔ موردی آزمونی براساس چارچوب دووال (۱۹۹۸) متشکل از دو فعالیت با شرکت ۳۰۵ دانش‌آموز پایهٔ نهم دهم و یازدهم برگزار شد. تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان براساس چارچوب استدلال شناختی دووال انجام شد. نتایج نشان داد بسیاری از دانش‌آموزان برای پاسخ به سؤالات هندسی از درک اجمالی نسبت به درک عاملی بیشتر استفاده می‌کنند. همچنین، تدریس هندسه با توجه به درک‌های اجمالی و عاملی می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا از مسیر درک طبیعی نگاه‌کردن به شکل هندسی به مسیر درک استدلالی ارتقا یابند. بنابراین، یافته‌های این تحقیق می‌تواند افق تازه‌ای برای آموزش ضمن خدمت معلمان بگشاید.

واژگان کلیدی: آموزش هندسه، بازنمایی، درک اجمالی و عاملی، دورهٔ متوسطه.

* نویسندهٔ مسئول، رایانامه: nas.asghari@iauctb.ac.ir

مقدمه

بازنمایی، یکی از ابزارهای مناسب برای نمایش روابط بین اجزای یک مفهوم و یا موقعیت است، اما هر بازنمایی نمی‌تواند یک مفهوم ریاضی را به‌طور کامل شرح دهد، بلکه فقط اطلاعاتی راجع به جنبه‌هایی از آن مفهوم را نشان می‌دهد. هندسه بیشتر از دیگر حوزه‌ها در ریاضیات قابلیت کشف و توسعهٔ مسیرهای متفاوت از تفکر را دارد. اهمیت هندسه برای کسانی که نمی‌خواهند ریاضیدان یا مهندس شوند، توسعهٔ توانایی‌های استدلال و بازنمایی‌های بصری و بهره‌مندی از همکاری این دو فرایند کاملاً متفاوت است (هرشکویتز[1] و همکاران، ۱۹۹۸). از طرفی، به دلیل پیچیدگی‌های شناختی، روابط هندسی را نمی‌توان به‌طور مستقیم از ساختمان شکل داده‌شده، نتیجه گرفت. بنابراین، اهمیت این بازنمایی‌ها در دروسی مانند هندسه که دانش‌آموزان در آن دارای دشواری‌های یادگیری هستند (مسکوییتا[2]، ۱۹۹٦؛ دووال[3]، ۱۹۹۸؛ لابرد[4]، ۲۰۰۵؛ ظهوری زنگنه، ۱۳۸٤) بیشتر است.

به عقیدهٔ دووال (۱۹۹۸)، روش نگاه‌کردن به شکل ترسیم‌شده یا ساخته‌شده توسط ابزار خاصی، یک عامل شناختی مهم در حل مسائل و در درک‌کردن اهمیت استدلال و اثبات در هندسه است. اینجا استفادهٔ دوپهلویی از کلمهٔ «دیدن» در ارتباط با شکل‌های هندسی وجود دارد. در حقیقت، دو سطح از عملکرد شناختی یا تشخیص وجود دارد که متمایز نشده‌اند: مسیر «درک طبیعی، مانند هر بازنمایی بصری از اشیاء یا ساختارهای فضایی، تصاویر و نمودارها» و مسیر «ریاضیاتی برای استدلال، تعریف نمودن و حل یا اثبات‌کردن مسئله». او خاطر نشان می کند مشکلات اکثر دانش‌آموزان به دلیل فاصلهٔ شناختی بین این دو مسیر متفاوت نگاه‌کردن به اشکال هندسی به وجود آمده است. بنابراین، ناهماهنگی بین آنچه در شکل دیده می‌شود و آنچه در صورت مسئله بیان شده است، رخ می‌دهد. برای تعریف نقش رهیافتی شکل هندسی، دووال (۱۹۹۵) پیشنهاد کرد یک‌شکل به‌عنوان

1. Hershkowitz
2. Mesquita
3. Duval
4. Laborde

یک درک شناختی[1] در نظر گرفته شود. کلمهٔ «درک» به این دلیل انتخاب شده بود که حقیقت وجود مسیرهای متفاوت در نگاه‌کردن به شکل هندسی را آشکار کند. بنابراین، او چهار درک را در دیدن یک شکل هندسی مشخص کرد: درک اجمالی[2]، درک ساختاری[3]، درک استدلالی[4] و درک عاملی[5]. درک اجمالی (دریافتی) چیزی است که فرد در مشاهده سریع یک شکل هندسی تشخیص می‌دهد. درک ساختاری به ساختمان و یا توصیف ساختار یک شکل هندسی اشاره می‌کند. درک استدلالی، به خواص ریاضی اطلاق می‌شود که صرفاً با درک دریافتی از شکل هندسی قابل استخراج نیست و مستلزم استدلال و یا کشف خواص شکل داده است. درک عاملی به توانایی تفکر برای ترسیم شکل‌هایی در ارتباط با شکل داده‌شده به‌منظور اصلاح[6] یا دوباره دیدن است.

به باور دووال(۱۹۹۵)، حل یک مسئله، اغلب اوقات نیازمند تعامل بین این سه درک (اجمالی، عاملی و استدلالی) و تشخیص تمایز آن‌ها از یکدیگر است، با این حال تحقیقات انجام‌شده (برای مثال، کریسانسو و گاگاتسیس[7]، ۲۰۱۳) بیان‌کنندهٔ تعامل بسیار کم بین درک‌های استدلالی و اجمالی است، همچنین یافته‌های کارپوز و اتاسوی[8] (۲۰۱۹) نشان داد درک‌های اجمالی، عاملی و استدلالی بیشتر از نیمی از دانش‌آموزان پایه نهم شرکت‌کننده در تحقیق، در سطح مطلوب برای هندسه دورهٔ متوسطه نیست. با اینکه به نظر می‌رسد شکل هندسی باید نقش حمایتگری را در حل تکالیف هندسی ایفا کند، نتایج پژوهش کریسانسو و گاگاتسیس (۲۰۱۳) نشان داد اکثر دانش‌آموزان از این نقش حمایتی برخوردار نیستند. برای استفاده رهیافتی از شکل هندسی، به عقیدهٔ دووال (۱۹۹۸) باید درک اجمالی به همراه حداقل یکی دیگر از درک‌ها فراخوانده شود که در این مسیر می‌توان با تعریف متغیرهای آموزشی و سازمان‌دهی تکالیف، به رشد تفکر هندسی[9] دانش‌آموزان در رویارویی با اشکال

1. Cognitive Apprehension
2. Perceptual Apprehension
3. Sequential Apprehension
4. Discursive Apprehension
5. Operative Apprehension
6. Modifying
7. Chrysanthou & Gagatsis
8. Karpuz &Atasoy
9. Geometric thinking

هندسی کمک کرد. بر این اساس و با توجه به مشکلاتی که به آن‌ها اشاره شد و با درنظرگرفتن اینکه مطالعه‌ای در این زمینه در ایران انجام نشده است، این مطالعه بر آن است که چگونگی درک‌های اجمالی و عاملی دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه در مواجهه با شکل هندسی را هنگام انجام تکالیف هندسی بررسی کند. به دلیل اهمیت زیاد نقش رهیافتی شکل هندسی در حل تکالیف هندسه، این پژوهش به دنبال پاسخگویی به سؤال زیر است: درک دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه در مواجهه با شکل هندسی حین انجام تکلیف هندسه چگونه است؟

بازنمایی

معلمان و دانش‌آموزان تصویر شهودی از بازنمایی[1] یک موقعیت دارند و اکثر اوقات هنگام تدریس یا انجام عمل ریاضی آن را به کار می‌برند. در حقیقت، در فرایند انجام ریاضیات[2]، برای تفکر درباره مسائل و ایده‌ها، بازنمایی‌های مختلفی از آن‌ها به کاربرده می‌شود (سلینگ[3]، ۲۰۱۵). در حالت کلی، بازنمایی روشی برای نشان‌دادن یک موقعیت واقعی از چشم‌اندازی دیگر است (گلدین و کاپوت[4]، ۱۹۹۶؛ ایون[5]، ۱۹۹۸). در فرایند بازنمایی فرد تلاش می‌کند که یک ساختار ریاضی را از طریق مطابقت با ساختاری درک کند که قبلاً فهمیده شده است. بنابراین، بازنمایی‌ها پیامدهای ساکنی نیستند بلکه دربرگیرندهٔ فرایندهای ساخت یک مفهوم یا یک رابطهٔ ریاضی هستند (کاوکو[6]،۲۰۰۱). در حالت خاص، بازنمایی‌ها ارتباط تنگاتنگی با یک مفهوم ریاضی دارند، مثل یک تابع به همراه نمودار آن. به نظر گاگاتیس و الیا[7] (۲۰۰٤)، درک یک مفهوم بدون استفاده از بازنمایی خاص دشوار است. بااین‌حال هر بازنمایی نمی‌تواند یک مفهوم ریاضی را به‌طور کامل شرح دهد بلکه فقط اطلاعاتی راجع به جنبه‌هایی از آن مفهوم ارائه می‌دهد. یک معادله یا یک فرمول مشخص در صفحه

1. Representation
2. Doing mathematics
3. Selling
4. Goldin & Kaput
5. Even
6. Couco
7. Gagatsis & Elia

مختصات دکارتی، تنها به‌عنوان قسمتی از یک سیستم گسترده‌ای از معانی و قراردادها درک می‌شود. سیستم‌های بازنمایی[1] برای ریاضیات مهم هستند و آموختن آن‌ها ساختارمند است، به‌طوری‌که بازنمایی‌های مختلف درون یک سیستم، قویاً با یکدیگر در ارتباط هستند (NCTM، ۲۰۰۰). بازنمایی‌ها دو دسته‌اند: انواعی که مربوط به ساخت‌های ذهنی‌اند که بازنمایی‌های داخلی[2] هستند و مواردی مرتبط به ساخت‌های فیزیکی مثل نوشته‌های روی کاغذ، ترسیم‌ها، گسترده‌های[3] هندسی و معادله‌ها هستند که بازنمایی‌های خارجی[4] نامیده می‌شوند (گلدین و اشتین‌گلد[5]،۲۰۰۱). کستبرگ[6] (۲۰۰۲) بازنمایی‌ها را به چهار شکل نوشتاری، تصویری، جدولی و گفتاری تقسیم می‌کند. اما استانداردهای شورای معلمان ریاضی آمریکا[7] (NCTM) عبارت بازنمایی را به عنوان هم فرایند و هم به‌عنوان بازده در نظر می‌گیرد. به عبارتی، این بازنمایی‌ها هم قابل‌مشاهده هستند و هم مواردی را شامل می‌شوند که غیر قابل مشاهده هستند و در ذهن اتفاق می‌افتند. هرچه بازنمایی‌های ذهنی دانش‌آموزان از یک مفهوم بیشتر باشد، آن‌ها در یادگیری آن مفهوم ریاضی موفق‌تر خواهند بود و اهمیت این بازنمایی‌ها در دروسی مانند هندسه که دانش‌آموزان در آن دارای دشواری‌های یادگیری هستند بیشتر است (مسکوییتا، ۱۹۹۸؛ دووال، ۱۹۹۹؛ جونز[8]، ۲۰۰۲؛ لابورد[9]، ۲۰۰۵؛ ظهوری زنگنه، ۱۳۸٤).

بنا به نظر مسکوییتا (۱۹۹۸)، یک‌شکل به بازنمایی بیرونی و نمادین از یک مفهوم و یا یک موقعیت در هندسه مرتبط می‌شود. به نظر دووال (2006)، در هندسه حداقل استفاده از دو سیستم بازنمایی لازم است که یکی برای بیان شفاهی و دیگری برای تجسم نمودن به کار می‌رود. زیرا هندسه دانشی است که نیازمند مشارکت شناختی دو ابزار بازنمایی که اولی زبان برای بیان خواص

1. Representation systems
2. Internal Systemes of Representation
3. Net
4. External Systems of Representation
5. Shteingold
6. Kastberg
7. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
8. Jones
9. Laborde

و نیز نتیجه‌گیری بقیهٔ خواص از آن‌ها و دومی برای تجسم اشکال، جهت بازنمایی فضا است. واژهٔ عدد در جبر، می‌تواند هم‌زمان به یک عدد خاص یا در حالت کلی به عدد از نوع مجرد آن اشاره کند. با این تفاوت که در جبر برای تشخیص حالت‌های مختلف در بازنمایی، از نمادها و سمبل‌های متمایز استفاده می‌شود. اما در بازنمایی یک مفهوم از طریق شکل در هندسه، این تفاوت‌ها در نظر گرفته نمی‌شود و در تعدادی از مسائل، یک بازنمایی خاص از یک مفهوم هندسی ممکن است برای موقعیت‌های متفاوتی استفاده شود. همیشه یک شیء محسوس بازنمایی می‌شود حتی اگر منظور نوع مجرد آن باشد. بنابراین، این‌گونه بازنمایی‌ها نمی‌تواند فرد را قادر سازد تا بین حالت متناهی و متنوع‌بودن اشکال (مثلاً یک مثلث با اضلاع مشخص) یا دیدن شکل جدا از محدودیت‌هایی که برای آن در نظر گرفته می‌شود (مثلث با رأس‌های A, B and C) تفکیک قائل شود. این پدیده مختص هندسه نیست، در دیگر شاخه‌های ریاضیات نیز وجود دارد.

فضای هندسی[1] و فضای بازنمایی[2]

به عقیدهٔ پوانکاره[3] (۱۹۵۲) فضای اشیای هندسی، از فضای بازنمایی، چارچوب بازنمایی‌ها و احساسات ما، بسیار متفاوت است. این دو فضا ازآنجا که ماهیت‌های متفاوتی دارند، دارای خواص متمایزی نیز هستند. زمانی که یک مثلث یا هر مفهوم هندسی دیگر به‌صورت خارجی، به‌وسیلهٔ یک تکهٔ کاغذ و یا هر وسیله دیگری، بازنمایی می‌شود، یک فضای بازنمایی استفاده می‌شود تا فضای هندسی! او همچنان خاطر نشان می‌کند، فضاهای هندسی و بازنمایی هردو پیوسته و نامتناهی هستند. با این حال فضای هندسی، سه‌بعدی (مگر اینکه غیر از آن در نظر گرفته شود)، همگن (به این معنا که همهٔ نقاط اهمیت یکسان دارند) و ایزوتراپیک (آنجا هیچ برتری ازلحاظ جهت وجود ندارد و یا خواص به جهت بستگی ندارند) هستند. در حالی که فضای بازنمایی به عنوان یک چارچوب از بازنمایی‌های ما، دوبعدی است، همگن نیست و نقاط و جهت‌هایی وجود دارند که دارای حالت‌های ویژه‌ای می‌باشند (میلر[4]، ۱۹۹۹). مسکوییتا (۱۹۹۸)، نیز بر این باور است در بعضی از اشکال هندسی

1. Geometrical space
2. Space of representation
3. Poincare
4. Miller

وجود جهت‌های خاص در ساختمان شکل (افقی یا قائم) یا برخورداری از زاویه‌های مشخص، ثبات و زیبایی در شکل، ممکن است درک این شکل‌ها را تقویت کند. برای مثال، عموماً دانش‌آموزان مثلث‌ها را با یک قاعده (ضلع افقی)، و دو ضلع اریب بازنمایی می‌کنند. با توجه به تأثیر فضای فیزیکی و دیگر عوامل فرهنگی، معلمان و مؤلفان کتاب‌های درسی بیشتر از سایر شکل‌ها از این نوع بازنمایی استفاده می‌کنند. به عقیدهٔ مسکوییتا (۱۹۹۸)، دلایل اقتصادی و همچنین، سهولت تنظیم صفحه‌نمایش برای ترسیم آن‌ها، از عوامل دیگر برای استفاده بیشتر از آن‌هاست. او خاطر نشان می‌کند، این امر یکی از عوامل شکل‌گیری بخشی از مشکلات دانش‌آموزان در رابطه با نقش و طبیعت شکل‌های هندسی است. دانش‌آموزان ممکن است نتوانند اختلاف بین دو فضای هندسی و بازنمایی را به‌صورت شفاف، تشخیص دهند. به عقیده لابرد (۲۰۰۵)، نکتهٔ اصلی، توجه آموزشگران ریاضی و دانش‌آموزان به این تفاوت‌هاست، در نتیجه با دانستن محدودیت‌های فضای بازنمایی، از چنین فضاهایی جهت کدگشایی برخی از خواص، نه همهٔ آن‌ها، در فضای هندسی، بهره می‌برند. افراد خبره می‌دانند که در فضای هندسی عمل می‌کنند، حتی اگر از فضای بازنمایی استفاده کنند و محدودیت‌های آن را می‌شناسند اما از آنجا که دانش‌آموزان در بیشتر مواقع در فضای بازنمایی در حال کارکردن هستند، ممکن است بین این دو سردرگم شوند. کاملاً قابل درک است که مبتدی‌ها تمایل دارند یک بازنمایی خارجی را به‌عنوان یک‌شکل متناهی و محسوس ببینند در حالی که ریاضیدان‌ها آن را یک‌شکل، فارغ از هرگونه محدودیت در نظر می‌گیرند.

نقش[1] و طبیعت[2] بازنمایی‌های خارجی در هندسه

به نظر مسکوییتا (۱۹۹۸) باوجود مشکلات و سردرگمی‌هایی که استفاده از بازنمایی خارجی در هندسه به همراه دارد، ابزار مفیدی در حل یک مسئله هستند که می‌توانند اثر رهیافتی داشته باشند. فیشبین[3] (۱۹۹۳) تلاش کرد پیچیدگی شناختی اشکال هندسی را با بررسی دو وجه مفهومی و

1. Role
2. Nature
3. Fischbein

تصویری آنان تجزیه و تحلیل کند. او اشکال هندسی را به‌عنوان موجودیت‌های ذهنی[1] تعبیر کرد که هم‌زمان دارای خواص شکلی و خواص مفهومی هستند، به عقیدهٔ وی، با اینکه یک‌شکل هندسی می‌تواند به‌گونه‌ای در نظر گرفته شود که شامل خواص مفهومی باشد، اما فقط یک مفهوم نیست بلکه یک تصویر نیز است. بنابراین، او اصطلاح مفهوم- شکل[2] را معرفی کرد که به شکل‌هایی اطلاق می‌شود که هم‌زمان هم مفهوم و هم بازنمایی فضایی هستند. ماریوتی[3] (۱۹۹۵) نیز در این زمینه یادآوری می‌کند که هندسه حوزه‌ای است که در آن لزوم تعامل بین تصاویر و مفاهیم مشهود است. در حقیقت افرادی که با هندسه آشنا هستند، از این (مفهوم-شکل) بسیار سود می‌برند ولی این حالت در فراگیران مبتدی وجود ندارد.

دووال (۱۹۹۹) نیز معتقد است که استفاده از اشکال در حل تکالیف هندسی، برای دانش‌آموزان همیشه سودمند نیست، زیرا بازنمایی‌های خارجی عملکرد یکسانی در همهٔ مسائل هندسه ندارند. در برخی مسائل بازنمایی خارجی روابط و خاصیت‌های چندگانه‌ای را در مسئله نشان می‌دهد بدون اینکه به فرایند حل مسئله اشاره‌ای داشته باشد که در این حالت بازنمایی خارجی **نقش** توصیفی[4] دارد، در حقیقت، می‌توان با توجه به بازنمایی خارجی ارائه‌شده، درک مختصری از اطلاعات موجود در بیان مسئله به دست آورد. در برخی دیگر از مسائل، بازنمایی خارجی، خود به‌عنوان حمایت‌کنندهٔ شهود عمل کرده و راه‌کارهایی را پیشنهاد می‌دهد که به سمت حل مسئله هدایت می‌شوند که در این حالت بازنمایی خارجی یک نقش رهیافتی[5] دارد. هرگاه بتوان روابط هندسی بیان‌شده در صورت مسئله را از ساختمان شکل هندسی نیز استنتاج کرد، بازنمایی خارجی طبیعت شیء[6] دارد. اما همیشه نمی‌توان روابط هندسی را به‌طور مستقیم از ساختمان شکل داده‌شده، نتیجه گرفت که در این حالت گفته می‌شود بازنمایی خارجی طبیعت عکس و یا تصویر[7] دارد (مسکوییتا، ۱۹۹۸). مسکوییتا یادآور می‌شود از آنجا که کتاب‌های درسی، تقریباً به‌طور کامل از بازنمایی‌های خارجی با طبیعت شیء

1. Mental entities
2. Figural-Concept
3. Mariotti
4. Descriptive
5. Heuristical
6. Object
7. Illustration

استفاده می‌کنند، حتی اگر دانش‌آموزان با انواع دیگر بازنمایی با توجه به تجربهٔ آموزشی خود آشنا باشند، هنگام رویارویی با مسائل برای غلبه بر مانعی که از طریق طبیعت شکل داده شده به وجود آمده است، باید جایگزین‌های لازم را، حتی ذهنی انجام دهند. در مطالعهٔ مسکوییتا (۱۹۹۸) تعدادی از دانش‌آموزان بی‌درنگ با رسم دوباره شکل داده‌شده، اما با طبیعت شیء، موفق به حل مسئله شدند. بنابراین، به عقیدهٔ دووال (۲۰۰۶)، روش نگاه‌کردن به شکل ترسیم‌شده یا ساخته‌شده توسط ابزار خاصی، یک عامل شناختی مهم در حل مسائل و در درک‌کردن اهمیت استدلال و اثبات در هندسه است. برای تعریف نقش رهیافتی شکل هندسی، دووال (۱۹۹۹) پیشنهاد کرد یک‌شکل به‌عنوان یک درک شناختی[1] در نظر گرفته شود. کلمه «درک» به این دلیل انتخاب‌شده بود که حقیقت وجود مسیرهای متفاوت در نگاه‌کردن به شکل هندسی را آشکار کند. بنابراین، او چهار درک را در دیدن یک شکل هندسی مشخص نمود: درک اجمالی[2]، درک ساختاری[3]، درک استدلالی[4] و درک عاملی[5]. درک اجمالی (دریافتی) چیزی است که فرد در مشاهده سریع یک شکل هندسی تشخیص می‌دهد. درک ساختاری به ساختمان یا توصیف ساختار یک‌شکل هندسی اشاره می‌کند. درک استدلالی، به خواص ریاضی اطلاق می‌شود که صرفاً با درک دریافتی از شکل هندسی قابل‌استخراج نیست و مستلزم استدلال و یا کشف خواص شکل داده شده است. درک عاملی به توانایی تفکر برای ترسیم شکل‌هایی در ارتباط با شکل داده‌شده به‌منظور اصلاح[6] یا دوباره‌دیدن است.

حل یک مسئله، اغلب اوقات نیازمند تعامل بین این سه درک (اجمالی، عاملی و استدلالی) و تشخیص تمایز آن‌ها از یکدیگر است (دووال، ۱۹۹۹). گرچه تحقیقات انجام‌شده (برای مثال، کریسانسو و گاگاتسیس، ۲۰۱۳)، بیان‌کنندهٔ تعامل بسیار کم بین درک‌های استدلالی و اجمالی است، یافته‌های کارپوز و اتاسوی (۲۰۱۹) نشان داد درک‌های اجمالی، عاملی و استدلالی بیشتر از نیمی از

1. Cognitive Apprehension
2. Perceptual Apprehension
3. Sequential Apprehension
4. Discursive Apprehension
5. Operative Apprehension
6. Modifying

دانش‌آموزان پایهٔ نهم شرکت‌کننده در تحقیق، در سطح مطلوب هندسه دورهٔ متوسطه نیست. همچنین، بیشتر دانش‌آموزان در شناسایی زیر شکل‌های[1] موجود در یک‌شکل داده‌شده، تبدیل اطلاعات شفاهی به بصری، کشف حقایق شفاهی مبتنی بر داده‌های شکلی، به‌کارگیری درک اجمالی مبتنی بر تعبیر و استدلال ، ناموفق بودند. در بررسی دستاوردهای با بررسی مطالعه‌های کریسانسو و همکاران (۲۰۱۱) و کارپوز و اتاسوی (۲۰۱۹) مشاهده شد دانش‌آموزان در انجام تکالیف هندسی درک عاملی به‌ندرت به کار گرفته شده است . با این حال، توانایی دانش‌آموزان در دوباره شکل‌بندی[2] شکل داده‌شده، در مسیر رشد آنان از دورهٔ اول به دورهٔ دوم متوسطه افزایش‌یافته بود. با اینکه به نظر می‌رسد شکل هندسی باید نقش حمایتگری را در حل تکالیف هندسی ایفا کند، نتایج پژوهش کریسانسو و گاگاتسیس (۲۰۱۳) نشان داد اکثر دانش‌آموزان از این نقش حمایتی برخوردار نیستند. آن‌ها با بررسی پیچیدگی‌های شناختی زیربنای شکل‌های هندسی دریافتند شکل‌های هندسی برای همهٔ دانش‌آموزان به میزان یکسانی عملکرد رهیافتی ندارد. آن‌ها همچنین نشان دادند چگونگی تدریس هندسه بر استفاده دانش‌آموزان از اشکال هندسی در حل مسئله، تأثیرگذار است. برای استفاده رهیافتی از شکل هندسی، به عقیدهٔ دووال (۱۹۹۵) باید درک اجمالی به همراه حداقل یکی دیگر از درک‌ها فراخوانده شود که در این مسیر می‌توان با تعریف متغیرهای آموزشی و سازمان‌دهی تکالیف، به رشد تفکر هندسی[3] دانش‌آموزان در رویارویی با اشکال هندسی کمک کرد. بر این اساس و با توجه به مشکلاتی که به آن‌ها اشاره شد و با درنظرگرفتن اینکه مطالعه‌ای در این زمینه در کشور ما انجام‌نشده است، همچنین، با توجه به مسائل و مشکلات آموزش هندسه (ظهوری زنگنه، ۱۳۸٤) و اهمیت چگونگی نگاه‌کردن به اشکال هندسی (شاریگین و پروتاسوف، ۲۰۰٤؛ میشل، ۲۰۱۳؛ هرشکویتز و همکاران،۱۹۹۸)، این مطالعه بر آن است که چگونگی درک‌های اجمالی و عاملی دانش‌آموزان دوره‌های اول و دوم متوسطه در نگاه‌کردن به شکل هندسی را هنگام انجام تکالیف هندسی بررسی کند.

1. Sub-figures
2. Reconfiguration
3. Geometric thinking

با مطالعه چارچوب‌های نظری یادگیری استدلال هندسی، دووال (۱۹۹۸)، فیشبین (۱۹۹۳)، فن‌هیلی[1] (۱۹۸۵)، و جونز[2] (۱۹۹۸) مشاهده شد در مدل شناختی استدلال هندسی دووال (۱۹۹۹)، به‌طور خاص به چگونگی درک‌های به‌کار گرفته‌شده توسط دانش‌آموزان در نگاه‌کردن به شکل هندسی پرداخته شده است، بنابراین، در مطالعهٔ حاضر برای بررسی درک‌های اجمالی و عاملی دانش‌آموزان دوره‌های اول و دوم متوسطه از چارچوب نظری دووال (۱۹۸۸) استفاده شد.

درک اجمالی (دریافتی)، اشاره به چیزی است که فرد در مشاهده سریع یک‌شکل هندسی تشخیص می‌دهد. در واقع، در فرایند این درک، می‌توان به بازشناسی و نام‌گذاری شکل‌ها و زیر شکل‌هایی که تشخیص داده می‌شود، اشاره کرد. این زیرشکل‌ها لزوماً وابسته به ساختمان خود شکل نیستند، زیرا یک‌شکل هندسی می‌تواند شامل واحدهای شکلی بیش از واحدهای استفاده‌شده در ساختمان شکل باشد. *درک ساختاری (ترتیبی)*، اشاره به ساختمان و یا توصیف ساختار یک‌شکل هندسی در صورت لزوم دارد. سازمان‌دهی واحدهای ابتدایی شکل، به قوانین و نشانه‌های تصویری وابسته نیست، بلکه به محدودیت‌های ابزاری و خواص ریاضی بستگی دارد. این محدودیت‌های ابزاری به وسایل استفاده‌شده برای ساختن شکل‌ها، مربوط می‌شود که می‌تواند یک خط کش، پرگار و یا واحدهای نرم‌افزاری هندسی باشد. به‌عبارت‌دیگر شکلی که با استفاده از دست ترسیم‌شده باشد، هیچ‌گونه محدودیت تکنیکی یا ابزاری ندارد، بااین‌حال محدودیت‌های ابزاری این حقیقت را بازتاب می‌دهند که شکل مور نظر تشخیص داده نخواهد شد، مگر اینکه ارتباط بین خواص ریاضی و محدودیت‌های ابزاری در نظر گرفته شده باشد. *درک استدلالی*، اشاره به خواص ریاضی دارد که صرفاً با درک دریافتی، قابل‌استخراج از شکل هندسی نیست و باید از طریق استدلال کردن و یا کشف خواص از شکل داده‌شده بیان شوند. *درک عاملی*، اشاره به مسیرهای گوناگون در اصلاح و یا دوباره شکل‌بندی[3] شکل داده‌شده دارد. توانایی تفکر برای ترسیم‌کردن شکل‌هایی در رابطه با شکل داده‌شده در مسیر اصلاح و یا دوباره دیدن، علامت‌های آشکار و ظاهری از درک عاملی است.

1. van Hiele
2. Jonse
3. Reconfiguration

به عقیدهٔ دووال (۱۹۹۵)، برای استفاده از یک‌شکل در هندسه، تلفیقی از درک‌های متفاوت نیاز است، با این حال، این‌گونه به نظر می‌رسد که همگی به‌عنوان یک درک واحد عمل می‌کنند و تفکیک درک‌های اجمالی، عاملی و استدلالی همیشه ساده نخواهد بود.

روش‌شناسی پژوهش

برای پاسخ به پرسش تحقیق، مبنی بر اینکه درک دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه در مواجهه با شکل هندسی حین انجام تکلیف هندسه چگونه است، تحقیق موردی روی نمونه ۳۰۵ نفری از دانش آموزان دورهٔ متوسطه طراحی شد. دانش‌آموزان پایه‌های نهم، دهم و یازدهم شهرستان رودهن بودند. آزمونی بر اساس چارچوب دووال (۱۹۹۸) طراحی و اجرا شد. این آزمون شامل دو سؤال بود که بر درک‌های اجمالی و عاملی تمرکز داشت. . شایان ذکر است با توجه محدودیت زمان و مکان و نیز پایبندی به حضور محقق در حین اجرای آزمون، از روش نمونه‌گیری در دسترس استفاده شد. توزیع فراوانی دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این آزمون به تفکیک پایهٔ تحصیلی در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱. توزیع فراوانی شرکت‌کنندگان در آزمون به تفکیک پایهٔ تحصیلی

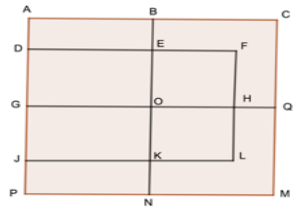
پایه	دانش‌آموزان
نهم	۱۶۳
دهم	٤٥
یازدهم	۹۷
کل	۳۰۵

انتخاب این سه پایه (نهم، دهم و یازدهم) به دلیل محتوای هندسه ارائه‌شده در کتاب‌های درسی این سه پایه بود. شایان ذکر است این آزمون در روزهای پایانی اردیبهشت‌ماه ۱۳۹۸ (تقریباً پایان سال تحصیلی) برگزار شده بود. بنابراین، در پایان پایهٔ نهم، دانش‌آموزان با مفهوم استدلال استنتاجی در اثبات‌های هندسی آشنا بودند. ضمناً در پایه‌های دهم و یازدهم نیز به‌واسطهٔ آشنایی بیشتر با استدلال هندسی از طریق انجام فعالیت‌های گوناگون هندسه، درک عمیق‌تری نسبت به مفاهیم

هندسی داشتند. علاوه بر امکان انتخاب محتوای یکسان برای آزمون، انتخاب این پایه‌ها امکان بررسی و شناسایی رشد درک و فهم دانش‌آموزان از شکل هندسی را در گذر از متوسطهٔ اول به دوم فراهم می‌کرد.

همان‌طور که اشاره شد، ابزار مورد استفاده در این تحقیق، آزمونی شامل دو تکلیف که در ارتباط با درک شکل هندسی بر پایهٔ چارچوب درک شکل هندسی دووال (۱۹۹۸) برای بررسی چگونگی درک دانش‌آموزان در نگاه‌کردن به شکل هندسی طراحی و تهیه‌شده بود. این دو تکلیف هندسی برای بررسی درک اجمالی و درک عاملی دانش‌آموزان طراحی‌شده بودند که دانش‌آموزان به‌صورت تشریحی به سؤالات پاسخ می‌دادند. مؤلف اول در هنگام اجرای آزمون حضور داشته و راهنمایی‌های لازم را به دانش‌آموزان ارائه می‌داد. او ضمن یادداشت‌برداری از سؤالاتی که دانش‌آموزان دربارهٔ چگونگی انجام تکلیف‌ها می‌پرسیدند، آن‌ها را تشویق می‌کرد که چگونگی تفکر خود را در شکل‌گیری پاسخ، روی برگهٔ جواب به‌طور کامل بنویسند.

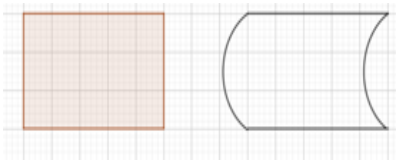
برای پاسخ به تکلیف ۱، دانش‌آموزان باید همهٔ مربع‌های موجود در شکل را تشخیص دهند (شکل ۱). در قسمت الف، از دانش‌آموزان خواسته‌شده تا به تعداد مربع‌هایی که تشخیص می‌دهند، اشاره کنند درحالی که در قسمت ب، آنان باید مربع‌هایی را که تشخیص داده‌اند، نام ببرند. با این شیوه می‌توان اشتباهات و موانع شناختی دانش‌آموزان دربارهٔ شکل‌ها را مشخص کرد.

تکلیف ۱ با دقت به شکل نگاه کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. الف) چند مربع می‌توانید در شکل تشخیص دهید. ب) مربع‌های موجود در شکل را نام ببرید.	

شکل ۱، فعالیت اول آزمون در خصوص درک اجمالی

تکلیف ۲ برای بررسی چگونگی درک عاملی دانش‌آموزان در مواجهه با شکل هندسی طراحی شد (شکل ۲). از دانش‌آموزان خواسته‌شده بود تا به مقایسهٔ مساحت دو شکل داده شده بپردازند.

انتظار می‌رفت دانش‌آموزان با دوباره شکل‌بندی شکل Bبدین‌صورت که قسمتی از جلوی شکل Bبریده و در قسمت عقب شکل B قرار داده شود، یک مستطیل مشابه شکل A بسازند. سپس، نتیجه بگیرند که هر دو شکل مساحت‌های برابر دارند. به عقیدهٔ دووال (۱۹۸۸)، درک عاملی به مسیرهای گوناگون در اصلاح و یا دوباره شکل‌بندی، شکل داده‌شده اشاره می‌کند. توانایی تفکر، جهت ترسیم شکل‌هایی در ارتباط با شکل داده‌شده، علامت‌های آشکار و ظاهری از درک عاملی است.

A B 	**تکلیف ۲** زیر جملهٔ درست خط بکشید و پاسخ خود را توضیح دهید. الف) مساحت A با مساحت B برابر است. ب) مساحت A کم‌تر از مساحت B است. ج) مساحت A بیش‌تر از مساحت B است.

شکل ۲، فعالیت دوم آزمون در خصوص درک عاملی

روایی محتوایی ابزار با استفاده از مشورت با خبرگان بررسی شد. این دو سؤال که در مطالعات قبلی (میشل، ۲۰۱۳؛ دووال، ۱۹۹۸) برای بررسی درک اجمالی و عاملی در نظر گرفته شده بودند، با استفاده ازنظر متخصصان در این مطالعه به‌عنوان ابزار اصلی جمع‌آوری داده به کار رفتند. برای این منظور این دو تکلیف برای دو متخصص آموزش ریاضی ارسال شد و آن‌ها تأیید کردند که می‌توان از آن‌ها برای بررسی درک‌های اجمالی و عاملی دانش‌آموزان استفاده کرد. شایان ذکر است برای ارتقای کیفیت تحقیق، در هر مرحله نتایج استخراجی برای دو متخصص موضوعی ارسال می‌شد و نظرات آن‌ها دریافت و مورد بررسی قرار می‌گرفت. همچنین، برای بررسی کدهای استخراجی از پاسخ‌های دانش‌آموزان در زمینهٔ درک‌های استخراجی ضریب توافق بین دوکدگذار محاسبه شد و مشاهده شد که ضریب توافق بین کدگذاران میزان قابل قبولی است (لندیس و کوخ[1]، ۱۹۷۷).

1. Landis & Koch

یافته‌های پژوهش

پاسخ‌های دانش‌آموزان به دو سؤال آزمون به‌صورت کیفی و کمی تجزیه و تحلیل شدند. برای این منظور، با استفاده از کد بوک[1] تهیه‌شده بر اساس دووال (۱۹۸۸)، پاسخ‌ها کدگذاری، سپس، کدها دسته‌بندی و مضامین مربوطه استخراج شدند (کرسول[2]، ۲۰۱٤). در طبقه‌بندی پاسخ‌ها، برای تکلیف ۱، همهٔ پاسخ‌ها شرکت داده شدند در حالی که این مشارکت پاسخ‌ها در طبقه بندی در تکلیف ۲، فقط شامل پاسخ‌های صحیح، که همان، انتخاب گزینه الف بود. ضمناً، فراوانی کدها برای بررسی درک‌های یادشدهٔ دانش‌آموزان با استفاده از شاخص‌های آمار توصیفی مثل فراوانی و درصد ارائه شدند.

شکل ۳ کد بوکی را نشان می‌دهد که بر اساس آن درک اجمالی در پاسخ‌های دانش‌آموزان به تکلیف ۱ کدگذاری شد. این کدگذاری به‌صورت رفت و برگشتی با توجه به دووال (۱۹۸۸) شروع و با توجه به پاسخ‌های دانش‌آموزان در نهایت به صورتی که در شکل ۳ آمده است تبدیل شد. شایان ذکر است برای نام‌گذاری کدهای مربوط به درک اجمالی بدین گونه عمل شد: ابتدا از حرف اول کلمه اجمالی[3] برای طبقه‌بندی استفاده شد. سپس، برای نام‌گذاری درک اجمالی بدون استدلال و به همراه استدلال از اندیس‌های ۱ و ۲ استفاده شد. درنهایت با شماره‌گذاری قبل از حرف اول کلمه اجمالی، تمام حالت‌های درک اجمالی بکار گرفته‌شده، طبقه‌بندی شدند. نام‌گذاری این کدها به‌صورت زیر است:

۱. با به‌کارگیری درک اجمالی پاسخ کامل به این تکلیف، تعداد هفت مربع است که عبارت از ACPM, ABGO, BCOQ, GOPN, OQNM, EFOH, OHKL هستند. در این حالت اگر دانش‌آموزان به همهٔ هفت مربع اشاره کنند، درک به‌کارگرفته شده، فراتر از درک اجمالی و نیازمند استدلال است، گرچه این استدلال، ذهنی است و با یک نگاه اجمالی قابل تشخیص نخواهد بود ($1p_1$).

1. Codebook
2. Creswell
3. Perceptual

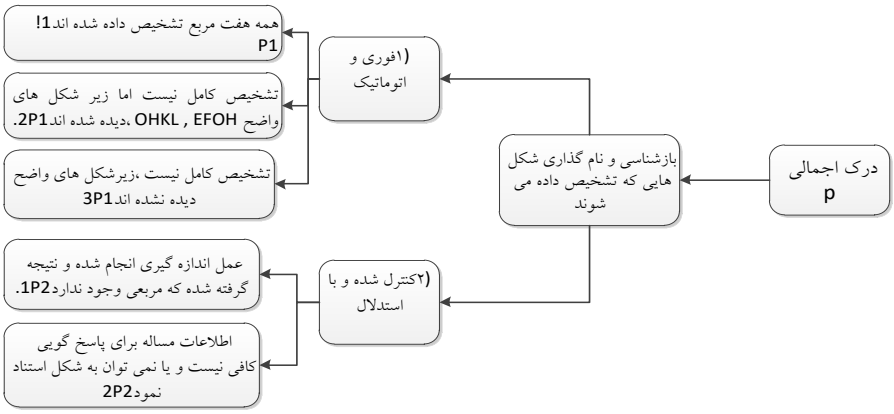
۲. تشخیص کامل نبوده، اما دست‌کم به دو مربع واضح و روشن، EFOH OHKL اشاره شده است ($2p_1$).

۳. تشخیص کامل نبوده، و به دو مربع ذکرشده در بند۲، نیز اشاره نشده است.($3p_1$).

٤. پاسخ‌ها با توجه به استدلال، نیز به این صورت دسته‌بندی شدند:

۵. دانش‌آموزان از طریق به‌کارگیری ابزار اندازه‌گیری و یا با تخمین زدن طول پاره‌خط، نتیجه گرفتند هیچ مربعی در شکل وجود ندارد ($1p_2$).

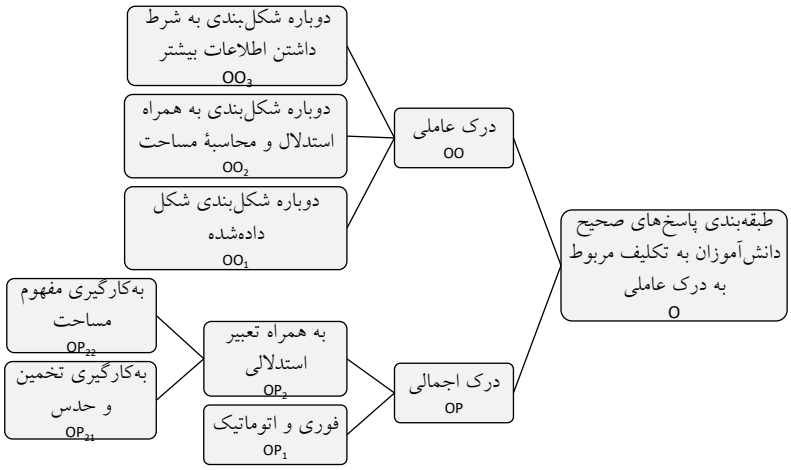
٦. در این گروه، دانش‌آموزان، اطلاعات سؤال را برای پاسخ‌گویی کافی ندانسته و اشاره کرده‌اند که نمی‌توانند به شکل استناد کنند ($2p_2$).



شکل ۳، کدگذاری پاسخ‌های دانش‌آموزان مربوط به درک اجمالی

تکلیف ۲ برای بررسی چگونگی درک عاملی دانش‌آموزان در مواجهه با شکل هندسی طراحی شد. همان‌طور که در بالا اشاره شد، بنا به نظر دووال (۱۹۸۸) ترسیم اشکال در ارتباط با شکل داده‌شده از ویژگی‌های درک عاملی است. بنابراین، با توجه به پژوهش‌های انجام‌شده (میشل، ۲۰۱۳)، پاسخ‌های دانش‌آموزان به این فعالیت در رابطه با درک عاملی، کدگذاری شدند. این کدگذاری به‌صورت رفت و برگشتی با توجه به پژوهش‌های مذکور شروع و با توجه به پاسخ‌های دانش آموزان درنهایت به صورتی که در شکل ٤آمده است، تبدیل شد. شایان ذکر است در زمینهٔ چگونگی نام

گذاری این کدها، می‌توان گفت، ازآنجایی‌که این تکلیف برای بررسی درک عاملی بود، بنابراین، از حرف اول کلمه عاملی[1] برای شروع این طبقه‌بندی استفاده شد. به دنبال آن اگر دانش‌آموز با استفاده از درک اجمالی به تکلیف، پاسخ داده بود، پس اولین حرف کلمهٔ اجمالی[2] در ادامهٔ حرف قبلی به‌کار می‌رفت. در این مرحله با توجه به درک اجمالی به‌کاررفته (با استدلال یا بدون استدلال)، از اندیس‌های ۱ و ۲ استفاده شد. به همین ترتیب، مشابه حالت قبل اگر دانش‌آموز به تکلیف درک عاملی با به‌کارگیری همین رویکرد پاسخ داده بود، با نوشتن دو بار حرف اول کلمه عاملی، پاسخ کدگذاری می‌شد. شایان ذکر است در انتخاب تکلیف برای بررسی درک عاملی دانش‌آموزان، تأکید بر بررسی توانایی در دوباره شکل‌بندی شکل داده شده بود.



شکل ٤. کدگذاری پاسخ‌های دانش‌آموزان مربوط به درک عاملی

در دو بخش «الف و ب» نتایج تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به دو تکلیف در آزمون ارائه می‌شود.

الف) یافته‌های مربوط به تکلیف ۱: ازآنجا که هیچ خاصیت ریاضی دربارهٔ شکل، در تکلیف ۱ بیان نشده است، مربوط به درک اجمالی است. شکل‌ها به‌گونه‌ای ساخته شده‌اند تا مربع به نظر

1. Operative
2. Perceptual

برسند. از دیدگاه ریاضیات، دانش‌آموز نمی‌توانست با اطمینان بگوید که این شکل‌ها مربع هستند، زیرا هیچ دلیلی برای مربع‌بودن ارائه نشده است. هرچند، تعدادی از دانش‌آموزان برای تشخیص مربع‌بودن شکل‌ها، تقاضای خط کش می‌کردند تا برای اندازه‌گیری پاره‌خط‌ها از آن استفاده کنند.

در طول اجرای آزمون دانش‌آموزان سؤال‌هایی در رابطه با چگونگی پاسخگویی به تکلیف می‌پرسیدند و محقق تا آنجا امکان داشت آنان را راهنمایی می‌کرد. ازجملهٔ این پرسش و پاسخ‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- «شکل‌ها شاید، چشمی، مربع به نظر برسند، اما واقعاً نمی‌دانیم که مربع هستند یا نه!» از دانش‌آموزان خواسته شد هر آنچه را فکر می‌کنند، روی برگه پاسخ بنویسند.
- «ازآنجا که می‌دانیم مربع، مستطیلی است که دو ضلع مجاورش برابرند، مستطیل‌ها را هم در نظر بگیریم؟» در اینجا می‌توان، اهمیت چگونگی تعاریف مفاهیم هندسی را ملاحظه نمود. دانش‌آموزان راهنمایی شدند تا مطابق با خواستهٔ فعالیت، شکل‌هایی که مربع هستند، را تشخیص دهند.

جدول ۲ توزیع فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به تکلیف ۱ در زمینهٔ درک اجمالی را نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول ۲ دیده می‌شود تعداد زیادی از دانش‌آموزان پایهٔ نهم (۹۶٫۶۱ درصد) هفت مربع در شکل را تشخیص داده‌اند و اما در پایهٔ دهم حدود نیمی از دانش‌آموزان این تعداد مربع را تشخیص دادند (۵۱٫۱۱ درصد). با اینکه انتظار می‌رفت دانش‌آموزان در پایه‌های بالاتر در انجام تکلیف هندسی، فقط به داده‌های شکلی اکتفا نکنند و به دنبال اطلاعات دقیق در مسئله باشند، اما ۷۷٫۳۲ درصد از دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم به این مسئله با به‌کارگیری درک اجمالی پاسخ داده بودند و به‌ندرت دچار این تردید شده بودند که «آیا چهارضلعی‌های موجود در شکل مربع هستند؟» یا برای این‌که شکلی مربع باشد باید چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟ بنابراین، بیشتر دانش‌آموزان در این فعالیت، اطلاعات لازم برای حل مسئله را با توجه به طبیعت شیء مانند شکل هندسی، از ساختمان آن استنتاج، به آن پاسخ داده بودند. آنان با توجه به محتوای کتاب‌های درسی و روش تدریس‌های مختلف در اکثر موارد، هماهنگی بین اطلاعات داده‌شده در مسئله و نیز ساختمان شکل هندسی ترسیم‌شده را، تجربه کرده‌اند، با این حال، گرچه در این فعالیت هیچ اطلاعاتی در

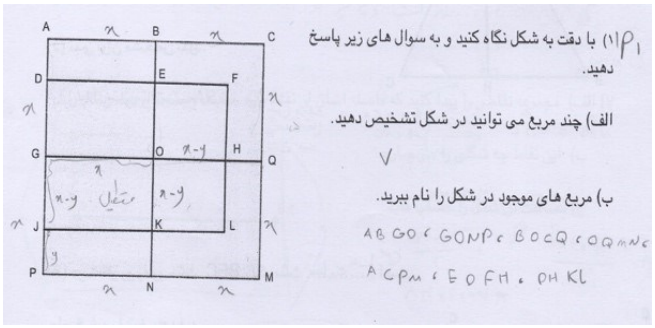
صورت‌مسئله داده نشده است، دانش‌آموزان مشابه موقعیت‌های قبل عمل نموده، و در نگاه‌کردن به شکل هندسی به‌ندرت بین مسیر درک طبیعی و درک ریاضیاتی پیوند برقرار کرده بودند. برخی از دانش‌آموزان کلاس دهم (۱۳٫۳۳ درصد) و کلاس یازدهم (۱۰٫۳۱ درصد) در این آزمون از رویکرد اندازه‌گیری استفاده کرده و نتیجه گرفته بودند که مربعی وجود ندارد. تعدادی از دانش‌آموزان پایهٔ دهم (۱۳٫۳۳ درصد) با اطمینان بیان کرده بودند نمی‌توانند فقط به داده‌های شکلی اکتفا کنند و ادعا کردند که هیچ مربعی در شکل وجود ندارد. این میزان در پایهٔ نهم کمتر از ۱ درصد و در پایهٔ یازدهم حدود ۳ درصد دانش‌آموزان را تشکیل می‌داد.

جدول ۲. توزیع فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به تفکیک کدهای مربوط به درک اجمالی

پایه	$1P_1$		$2P_1$		$3P_1$		$1P_2$		$2P_2$		جمع
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	
نهم	۱۰۱	٦۱,۹٦	٤۲	۲٥,۷۷	۱٦	۹,۸۲	۳	۱,۸٤	۱	۰,٦۱	۱٦۳
دهم	۲۳	٥۱,۱۱	٥	۱۱,۱۱	٥	۱۱,۱۱	٦	۱۳,۳۳	٦	۱۳,۳۳	٤٥
یازدهم	۷٥	۷۷,۳۲	٥	٥,۱٥	٤	٤,۱۲	۱۰	۱۰,۳۱	۳	۳,۱	۹۷
جمع	۱۹۹	٦٥,۲٥	٥۲	۱۷,۰٥	۲٥	۸,۲	۱۹	٦,۲۳	۱۰	۳,۲۸	۳۰٥

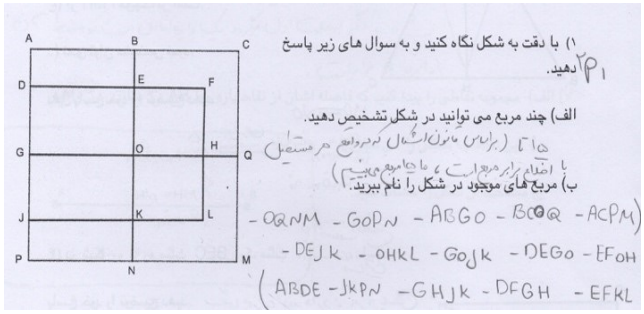
چگونگی شکل‌گیری پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال ۱

در زمینهٔ شکل‌گیری چگونگی پاسخ‌های دانش‌آموزان (درک اجمالی)، در شکل ۵ مشاهده می‌شود، دانش‌آموز پایهٔ نهم با استفاده از درک اجمالی، برای شمردن همهٔ هفت مربع از رنگ‌آمیزی استفاده کرده است تا بتواند مربع‌های زیرین را به‌درستی بشمارد. دانش‌آموز دیگری چهارضلعی بزرگ را مربع فرض کرده (درک اجمالی) سپس با رسم خطوط تقارن، چهار مربع بعدی را نیز تشخیص داده بود. هرچند برای اثبات مربع بودن دو چهارضلعی EFOH و OHKL اذعان داشته بود که دلیلی در اختیار ندارد و یا اینکه مانند شکل ۵ با توجه به استدلال استنتاجی عمل کرده بود. بنابراین، با فرض مربع‌بودن چهارضلعی بزرگ، به نظر می‌رسد استخراج روابط هندسی از ساختمان شکل، نه به صورت کامل، بلکه تا حدودی برای او قابل قبول بوده است.



شکل ۵. پاسخ دانش‌آموز پایهٔ نهم به تکلیف ۱ با فرض مربع‌بودن چهارضلعی بزرگ

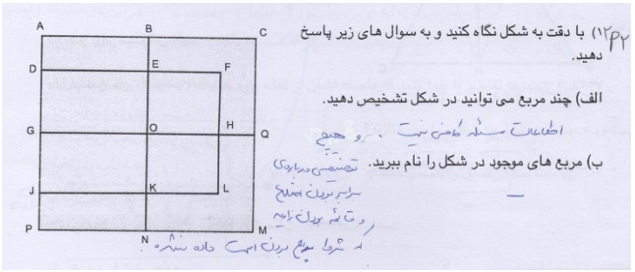
به خاطر آوردن ناقص بعضی از مفاهیم، یکی از موانعی بود که دانش‌آموزان در تشخیص صحیح اشکال با آن روبه‌رو شدند دانش‌آموز همهٔ هفت مربع را تشخیص داده اما با توجه به تعریفی که از مفهوم مربع در ذهن خود داشته است، در حین به‌کارگیری درک استدلالی دچار این تردید شده، «آیا مستطیل‌ها را هم به‌حساب آوریم؟» در تعدادی از پاسخ‌ها عقل سلیم او به این سؤال، پاسخ منفی داده بود و درنتیجه دانش‌آموز همان هفت مربع را به‌حساب آورده بود. در شکل ٦ دانش‌آموز به‌درستی تعریف مربع را بیان کرده، اما درک کاملی از آن ندارد. در اینجا حتی درک اجمالی او را دچار این تردید نکرده است که «آیا تعریف مربع را به‌درستی به‌کار برده است؟»



شکل ۶. پاسخ دانش‌آموز و عدم درک درست او از تعریف مربع

در به‌کارگیری درک اجمالی به همراه استدلال، تعدادی از دانش‌آموزان از رویکرد اندازه‌گیری استفاده کردند. بدین صورت که با استفاده از خط‌کش و یا تخمین طول پاره‌خط، نتیجه گرفتند که هیچ مربعی در شکل وجود ندارد. این مورد که در پایهٔ دهم بیشتر اتفاق افتاد نشان می‌دهد

دانش‌آموزی که با استدلال هندسی آشناتر است، چون اطلاعات مورد نیاز را دربارهٔ روابط هندسی در بیان مسئله نیافته است، تلاش کرده است که آن‌ها را از شکل استخراج کند. دانش‌آموزان بر این باور بودند که روابط هندسی را می‌توان از شکل هندسی مربوطه استخراج نمود، و این باور را کتاب‌های درسی و چگونگی آموزش هندسه تقویت کرده بود. بعضی از دانش‌آموزان پایهٔ دهم اطلاعات مسئله را برای پاسخ‌گویی کافی ندانسته و بیان کردند که نمی‌توانند برای حل مسئله فقط به شکل استناد کنند. در شکل ۷ کامل‌ترین پاسخ از دیدگاه ریاضیات به فعالیت داده‌شده است. این دانش‌آموز پایهٔ دهم، با آشنایی با هر دو فضای بازنمایی و هندسی، با اطمینان بیان کرده که اطلاعات مسئله کافی نیست و نمی‌توان به شکل استناد کرد. دانش‌آموز توانسته بود بین درک طبیعی و درک ریاضیاتی خویش در نگاه‌کردن به شکل هندسی، ارتباط برقرار کند. بررسی بیشتر پاسخ‌های مشابه نشان داد این دانش‌آموزان در آموزش هندسه‌شان در طول سال تحصیلی همواره شاهد تأکید، بر استخراج داده‌های مسئله از بیان آن، بوده‌اند.



شکل ۷، پاسخ کامل دانش‌آموز به فعالیت ۱ با استفاده از درک اجمالی به همراه استدلال

یافته‌های مربوط به تکلیف ۲

از آنجا که در تکلیف ۲ هیچ خاصیت ریاضی دربارهٔ شکل، در بیان مساله ذکر نشده است، به نظر می رسد که مربوط به درک اجمالی است. اما همان‌طور که مشاهده می‌شود، شکل‌ها بر روی صفحهٔ شطرنجی قرار داده شده‌اند تا بخشی از خواص ریاضی مورد نیاز برای استدلال، بدین گونه فراهم شود. با این حال، برای پاسخ درست به این فعالیت از دیدگاه ریاضیات، لازم بود تا دانش‌آموزان از یکسان‌بودن میزان فرورفتگی و برآمدگی در شکل سمت راست، با خبر باشند. از آنجا که این فعالیت

به دنبال بررسی درک عاملی دانش‌آموزان (دوباره شکل‌بندی شکل داده شده)، در مواجهه با شکل هندسی بود، بنابراین این گونه در نظر گرفته شد که صفحهٔ شطرنجی تا حدودی این برابری فرورفتگی و برآمدگی را نشان می‌دهد. در نتیجه پاسخ درست به فعالیت بدین صورت در نظر گرفته شد: قسمتی از جلوی شکل B بریده و در قسمت عقب شکلB قرار داده شود، یک مستطیل مشابه شکل A بسازند. سپس نتیجه بگیرند که هر دو شکل مساحت‌های برابر دارند. در نهایت، پاسخ‌ها به‌صورت زیر دسته‌بندی شدند:

۱. پاسخ‌هایی که مبتنی بر درک اجمالی بودند، به دو دسته تقسیم شدند. در دسته اول پاسخ‌هایی بودند که به دنبال یک نگاه اجمالی به شکل و بدون بیان هیچ استدلالی، شکل‌گرفته بودند (op_1). در دستهٔ دوم پاسخ‌های مبتنی بر درک اجمالی، البته به همراه استدلال قرار داشتند (op_2). این پاسخ‌ها خود به دو دسته تقسیم شدند: گروه اول، استدلال‌های درست یا نادرستی که بر پایهٔ تخمین و حدس بیان شده بودند (op_{21}) و گروه دوم، استدلال‌های درست یا نادرستی که با استفاده از مفهوم مساحت و اندازه‌گیری آن بود (op_{22}).

۲. پاسخ‌هایی که مبتنی بر درک عاملی بودند، به سه دسته تقسیم شدند. در *دستهٔ اول* پاسخ‌هایی قرار داشتند که تنها با دوباره شکل‌بندی شکل داده‌شده، که همان هدف اصلی تکلیف است، شکل گرفته بودند. این دوباره شکل‌بندی، به شیوه‌های متفاوت انجام شده بود. ازجمله الف) به‌صورت شفاهی توضیح داده‌شده بود که قسمت جلوی شکل بریده شود و در قسمت عقب شکل قرار داده شود. ب) با استفاده از رسم فلش، به قسمت‌هایی که باید بریده شود و چسبانده شود، اشاره شده بود. ج) بیان شده بود که قسمت‌های هاشور خورده مساحت‌های برابر دارند. د) عنوان شده بود هر مقداری که به قسمت غربی شکل اضافه شده است از قسمت شرقی کم شده است. ه) و در نهایت، اظهار کرده بودند اگر شکل A روی شکل B قرار داده شود می‌توان فهمید که قسمتی از شکل B پاک‌شده است و روی ضلع رو به روی آن، چسبانده شده است.) (oo_1).

در *دسته دوم* این گروه، پاسخ‌هایی قرار داشتند که علاوه بر دوباره شکل‌بندی شکل داده‌شده، دانش‌آموزان به محاسبهٔ مساحت نیز پرداخته بودند (oo_2).

در *دستهٔ سوم* پاسخ‌ها، اشاره‌شده بود: اطلاعات کافی نیست یا از آنجا که نمی‌توان فقط به شکل

استناد نمود، بنابراین، با شرط داشتن اطلاعات بیشتر، می‌توان با دوباره شکل‌بندی شکل داده‌شده، نشان داد هر دو شکل دارای مساحت‌های برابر هستند (oo_3).

جدول ۳، توزیع فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به تکلیف ۲ را به تفکیک دربارهٔ درک عاملی نشان می‌دهد. همان‌طورکه دیده می‌شود، نیمی از پاسخ‌های صحیح دانش‌آموزان پایه نهم با به‌کارگیری درک اجمالی شکل گرفته بود. این پاسخ‌های دانش‌آموزان به تکلیف ۲ به دو دسته تقسیم می‌شوند، گروه اول، پاسخ‌هایی که با یک نگاه اجمالی به شکل، بدون هیچ استدلالی داده شده‌اند (۱۹٫۸٤ درصد) و گروه دوم، پاسخ‌هایی که با استدلال همراه بودند. گروه دوم خود به دو دسته، ۱. به‌کارگیری تخمین و حدس دریافتن پاسخ (۱۰٫۳۲ درصد) و ۲. حل مسئله با استفاده از مفهوم مساحت (۱۹٫۸٤ درصد) تقسیم می‌شوند. از طرفی، در پایهٔ دهم، ۲۵ درصد و در پایهٔ یازدهم ۳٦٫۹۰ درصد پاسخ‌های صحیح ، بر اساس درک اجمالی بود. همان‌طور که مشاهده می‌شود دانش‌آموزان در پایه‌های دهم و یازدهم بیشتر از درک اجمالی به همراه استدلال بهره برده‌اند.

از طرف دیگر، ۵۰ درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان پایهٔ نهم با استفاده از درک عاملی ارائه شده بودند. این پاسخ‌ها خود به سه دسته تقسیم می‌شدند: در دستهٔ اول، ٤۳٫٦۵ درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان، با استفاده از دوباره شکل‌بندی شکل داده‌شده، به وجود آمده بودند که همان هدف اصلی فعالیت بود. ٦٫۳۵ درصد پاسخ‌ها که در دستهٔ دوم قرار داشتند، به این دوباره شکل‌بندی اکتفا نکرده و مساحت را نیز محاسبه کرده بودند. دستهٔ سوم دانش‌آموزانی بودند که داده‌های مسئله را کافی ندانسته و بیان کرده بودند به‌شرط داشتن اطلاعات بیشتر با به‌کارگیری رویکرد دوباره شکل‌بندی شکل داده‌شده، مساحت‌ها برابر هستند. شایان ذکر است هیچ‌یک از دانش‌آموزان پایهٔ نهم در این دسته قرار نگرفته بودند. در خصوص عملکرد دانش‌آموزان پایهٔ دهم، مشاهده می‌شود ۷۵ درصد آن‌ها، به این تکلیف، با به‌کارگیری درک عاملی پاسخ داده بودند. ٤۷٫۵۰ درصد از دانش‌آموزان پایه دهم، استفاده از رویکرد عاملی را برای پاسخ‌گویی کافی دانستند. با این حال، حدود ۲۲٫۵۰ درصد دانش‌آموزان پایهٔ دهم، برای اطمینان از درستی پاسخ خود، به استفاده از درک عاملی اکتفا نکرده، و با الهام‌گرفتن از نقش توصیفی شکل، از مفهوم مساحت استفاده و با محاسبهٔ آن، برابری

مساحت دو شکل را نتیجه گرفته بودند. در نهایت، دانش‌آموزان در پایهٔ یازدهم تقریباً نزدیک به دانش‌آموزان در پایهٔ نهم، با دوباره شکل‌بندی به این تکلیف پاسخ دادند (٤٤٫٠٥ درصد). همان‌طور که مشاهده می‌شود در پایهٔ یازدهم به نسبت پایهٔ دهم، دانش‌آموزان کمتر به استفاده از مسیرهای بیشتر برای پاسخ‌گویی به تکلیف تمایل نشان دادند.

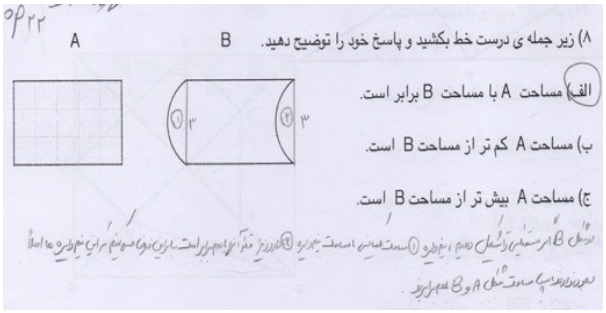
جدول ۳. توزیع فراوانی پاسخ‌های صحیح دانش‌آموزان به تفکیک کدهای مربوط به درک عاملی

پایه	Op_1		Op_{21}		Op_{22}		op		O_{O1}		O_{O2}		O_{O3}		oo		مجموع پاسخ‌های درست	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد		
نهم	۲۵	۱۹٫۸٤	۱۳	۱۰٫۳۲	۲۵	۱۹٫۸٤	٦۳	۵۰	۵۵	٤۳٫٦۵	۸	٦٫۳۵	۰	۰	٦۳	۵۰	۱۲٦	۷۷٫۳
دهم	۲	۵	۲	۵	٦	۱۵	۱۰	۲۵	۱۹	٤۷٫۵۰	۹	۲۲٫۵۰	۲	۵	۳۰	۷۵	٤۰	۸۸٫۸۹
یازدهم	۷	۸٫۳۳	٤	٤٫۷٦	۲۰	۲۳٫۸٤	۳۱	۳٦٫۹۰	۳۷	٤٤٫۰۵	۱۵	۱۷٫۸٦	۱	۱٫۱۹	۵۳	٦۳٫۱۰	۸٤	۸٦٫٦۰
مجموع	۳٤	۱۳٫٦۰	۱۹	۷٫٦۰	۵۱	۲۰٫٤۰	۱۰٤	٤۱٫٦۰	۱۱۱	٤٤٫٤۰	۳۲	۱۲٫۸۰	۳	۱٫۲۰	۱٤٦	۵۸٫٤۰	۲۵۰	۸۱٫۹۷

سرانجام ۱٫۱۹ درصد دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم و ۵ درصد دانش‌آموزان پایهٔ دهم ادعا کردند با شرط داشتن اطلاعات بیشتر با به‌کارگیری دوبارهٔ شکل‌بندی شکل داده‌شده، رأی به برابری مساحت‌ها می‌دهند. به نظر می‌رسد ترسیم شکل در صفحه شطرنجی، کمبود اطلاعات لازم در بیان مسئله را جبران کرده و به دانش‌آموزان کمک کرده بود تا با توجه به برداشت آن‌ها از شکل، از نقش رهیافتی و یا نقش توصیفی شکل، بهرهٔ لازم را ببرند.

چگونگی شکل‌گیری پاسخ‌های دانش‌آموزان به فعالیت ۲

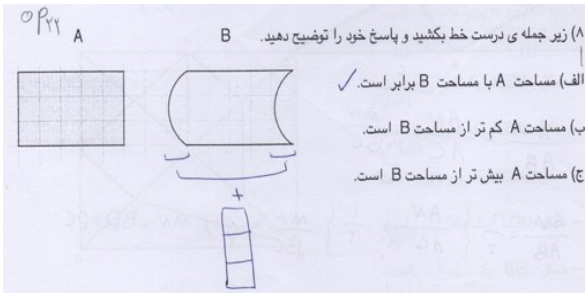
تفکیک درک‌های شناختی به‌کاررفته برای انجام تکالیف، همواره آسان نیست. دانش‌آموز در شکل ۸، ابتدا یک مستطیل می‌سازد سپس، با بیان این مطلب که نیم‌دایره‌های شماره‌های ۱ و ۲ دارای مساحت برابر هستند، ادعا کرده است که « می‌توان فرض کرد که این نیم‌دایره‌ها اصلاً وجود ندارند پس مساحت هر دو شکل برابر است». در اینجا به دوباره شکل‌بندی اشاره نشده است (درک عاملی) و با تأکید بر برابری مساحت شکل‌های یکسان کار به اتمام رسیده است (درک استدلالی).



شکل ۸. پاسخ دانش‌آموز به فعالیت ۲ روش ترکیبی درک عاملی و درک استدلالی

در شکل ۹ با اینکه ممکن است به نظر برسد که درک عاملی رخ‌داده است اما با کمی دقت می‌توان فهمید که تأکید دانش‌آموز بر شمارش خانه‌های مربعی کوچک برای یافتن مساحت بوده است، که حاکی از رخ دادن درک اجمالی به همراه تعبیر استدلالی است. نشانه‌ای از برش و جایگذاری دوباره در شکل دیده نمی‌شود.

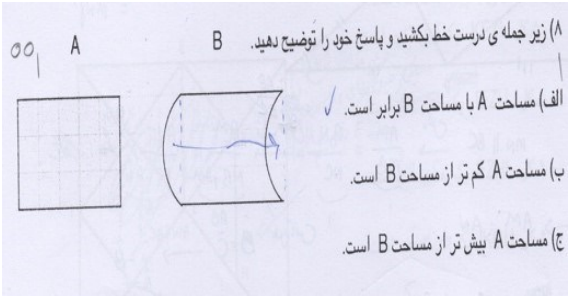
دانش‌آموزانی که به جست‌وجوی اطلاعات دقیق در بیان مسئله می‌پرداختند و به داده‌های شکلی برای پاسخ‌گویی به فعالیت اکتفا نمی‌کردند، باوجود طبیعت شئ مانند شکل، مشاهده شد با به‌کارگیری استدلال، اطلاعات مورد نیاز را از شکل استخراج نموده و به مسئله پاسخ دادند.



شکل ۹. پاسخ به فعالیت ۲ از طریق شمارش مربع‌ها

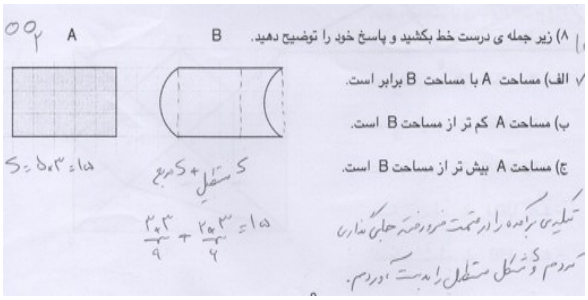
در توضیح چگونگی به کارگیری درک عاملی، دانش‌آموز به عمل گردشدن سر مستطیل و فرورفتن ته آن، که مکمل هم هستند و باعث تغییر شکل شده‌اند، اشاره می‌کنند. او هم به‌صورت شفاهی و هم با به تصویرکشیدن دوباره شکل‌بندی شکل داده‌شده، به‌کارگیری درک عاملی خود را

در انجام فعالیت به نمایش می‌گذارد، یا اینکه کاملاً ذهنی، در شکل 10 با نشان‌دادن عمل دوباره شکل‌بندی، از طریق یک فلش، به‌درستی با تشخیص نقش رهیافتی شکل، به فعالیت پاسخ داده است.



شکل ۱۰. پاسخ به فعالیت ۲ با به‌کارگیری درک عاملی

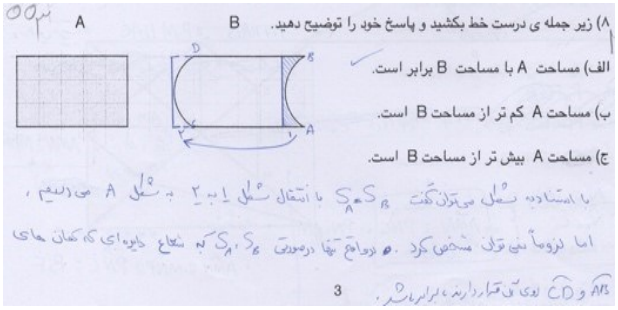
همان‌طور که در شکل ۱۱ دیده می‌شود دانش‌آموز با بهره‌مندی از نقش توصیفی شکل، با استفاده از مفهوم مساحت، شروع به کار کرده، حین انجام فعالیت برای یافتن مساحت مستطیلی که خود به وجود آورده بود از نقش رهیافتی شکل استفاده نموده و در نهایت، با محاسبه مساحت‌ها، رأی به برابری آن‌ها داده است. این پاسخ می‌توانست در گروه مربوط به اندازه‌گیری مساحت‌ها قرار داده شود. می‌بینیم که تفکیک درک‌های به‌کارگرفته‌شده در حل مسائل، همیشه ساده نیست.



شکل ۱۱. پاسخ به فعالیت ۲ با استفاده از نقش توصیفی و رهیافتی شکل

در شکل ۱۲، دانش‌آموز ادعا می‌کند می‌توان با انتقال شکل ۱ به شکل ۲، که همان به‌کارگیری درک عاملی است، برابری مساحت‌ها را نشان داد. اما او تأکید می‌کند که هر دو کمان داده‌شده در شکل، باید از دایره‌هایی با شعاع‌های برابر باشند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، دانش‌آموز برای

استفاده از نقش رهیافتی شکل، تصمیم به برش متفاوتی گرفته است. به نظر مسکوییتا (۱۹۹۸)، نقش یک‌شکل هندسی، به رفتار فرد نیز بستگی دارد.



شکل ۱۲. برشی متفاوت در به‌کارگیری نقش رهیافتی شکل

بحث و نتیجه‌گیری

این پژوهش برای بررسی انواع درک‌های دانش‌آموزان متوسطه در پایه‌های نهم، دهم و یازدهم در مواجهه با شکل، حین انجام فعالیت هندسی بر پایهٔ چارچوب درک شکل هندسی دووال (۱۹۹۸) با محتوای هندسهٔ ۱ (سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، ۱۳۹۷) انجام شد. یافته‌های این پژوهش در تکلیف اول مطابق با تحقیق میشل (۲۰۱۳) نشان داد تعداد زیادی از دانش‌آموزان هر سه پایه موفق شدند با به‌کارگیری درک اجمالی، مربع‌های موجود در شکل را مشخص کنند. در پژوهش مذکور پاسخ درست به تکلیف از دیدگاه ریاضیات، تشخیص هفت مربع موجود، ارزیابی شده بود، اما در مطالعهٔ حاضر همان‌طورکه دریافته‌ها اشاره شد پاسخ درست به این فعالیت، با نگاه‌کردن از مسیر درک ریاضیاتی، از آنجا که هیچ اطلاعاتی در مورد چهارضلعی‌های رسم‌شده در بیان مسئله نیامده است، بدین گونه است: هیچ مربعی در شکل وجود ندارد.

شایان ذکر است که دانش‌آموزان پایهٔ نهم در فصل سوم کتاب ریاضی خود با بحث استدلال و اثبات در هندسه آشنا می‌شوند. در همین کتاب تأکید شده است که به‌طور معمول در ریاضیات به‌ویژه در هندسه، استفاده از شکل، ترسیم و شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائهٔ حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، اما به این تشخیص‌ها نمی‌توان به‌طور کامل اطمینان کرد (سازمان پژوهش و

برنامه‌ریزی آموزشی، ۱۳۹٦). با این حال، نتایج این تحقیق نشان داد تقریباً همهٔ دانش‌آموزان پایهٔ نهم و تعداد زیادی از دانش‌آموزان پایه‌های دهم و یازدهم، برای پاسخ‌گویی به این فعالیت، به شکل ترسیم‌شده استناد کرده و به چیزی فراتر از شکل و اطلاعات درون آن، نیازی نداشتند.

ضمناً یافته‌های تحقیق حاضر نشان داد که رویکردهای معمول تدریس هندسه در دوره‌های اول و دوم متوسطه، دانش‌آموزان را در نگاه‌کردن به شکل هندسی در مسیر درک اجمالی کمک نکرده است، تا مسیر درک طبیعی نگاه‌کردن به شکل هندسی، به درک ریاضیاتی پیوند یابد. این یافته مطابق با نتایج پژوهش‌های قبلی است (میشل- کریسانسو و گاگاتسیس، ۲۰۱۳؛ ۲۰۱٤) که به اهمیت روش تدریس نیز اشاره می‌کند. همچنین، با بررسی فصل سوم ریاضی ۹ (سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، ۱۳۹٦) شاید بخشی از این رفتار دانش‌آموزان متأثر از نوع مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی باشد. زیرا همهٔ شکل‌های رسم شده، در این کتاب، طبیعت شئ دارند. به‌عبارت‌دیگر حقایق هندسی در بیان مسئله، از شکل ترسیم‌شده، به‌راحتی قابل استنتاج است. نتایج نشان داد تعدادی از دانش‌آموزان با درک اجمالی از شکل و به‌کارگیری رویکرد اندازه‌گیری به محاسبهٔ طول پاره‌خط‌ها پرداختند و در نهایت، نتیجه گرفتند هیچ مربعی در شکل وجود ندارد. به‌ندرت تمرین و یا مثالی را در کتاب می‌توان یافت که به واسطهٔ آن دانش‌آموز با این حقیقت روبه‌رو شود، همواره نمی‌توان روابط هندسی را از ساختمان شکل داده‌شده نتیجه گرفت، یا به عبارتی، طبیعت شکل ترسیم‌شده، تصویر یا عکس باشد. بنابراین، دانش‌آموز به‌تدریج می‌آموزد که شکل هندسی می‌تواند منبعی قابل اعتماد از اطلاعات دربارهٔ مسئله باشد. به باور مسکوییتا (۱۹۹۸)، یکی از دلایل استفاده بیش از حد از اشکال با طبیعت شیء، در کتاب‌های درسی، جنبهٔ اقتصادی و تنظیمات ساده در فرآیند ترسیم آن‌ها است. با این حال تعدادی از دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال ۱ عملکرد متفاوتی نسبت به دیگران داشتند. آنان اطلاعات موجود برای حل فعالیت اول را کافی ندانسته و بیان کرده بودند که نمی‌توانند فقط به داده‌های شکلی استناد کنند، بنابراین، اینگونه پاسخ دادند: هیچ مربعی در شکل وجود ندارد. این یافته در هیچ‌یک از پژوهش‌های مربوط به درک شکل هندسی، مشاهده نشده بود. ممکن است این نتیجه در خصوص تأثیر متفاوت آموزش هندسه‌ای باشد که برخی دانش‌آموزان با ان روبه‌رو شده بودند. این آموزش تأکید بر پیوند بین مسیر درک طبیعی و مسیر درک ریاضیاتی نگاه‌کردن به

شکل هندسی داشت. به نظر می‌رسد که روش یاددهی و یادگیری هندسه به این گروه از دانش‌آموزان کمک کرده بود تا در نگاه‌کردن به شکل هندسی در مسیر درک اجمالی متوقف نشده و با به‌کارگیری استدلال در فضای هندسی به انجام فعالیت بپردازند.

یافته‌های این پژوهش در فعالیت دوم مربوط به درک عاملی، در راستای پژوهش‌های قبلی (برای مثال، دووال، ۱۹۹۸؛ ماریوتی، ۱۹۹۵؛ میشل- کریسانسو و گاگاتسیس، ۲۰۱۳؛ ۲۰۱٤) نشان داد، گرچه انتظار می‌رود، شکل هندسی نقش حمایتگری در انجام تکالیف هندسه داشته باشد، اما این پشتیبانی، برای بیشتر دانش‌آموزان آشکار نیست. با بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان، نقش‌های متفاوتی از شکل هندسی در حل تکالیف مشاهده شد. این عملکرد متمایز، متأثر از مسیر نگاه آن‌ها به شکل هندسی بود. در مسیر درک اجمالی، اشکال، تغییرناپذیر و ثابت به نظر می‌آیند. این برداشت، امکان سازمان‌دهی مجدد، در ساختمان شکل ترسیم‌شده، که غالباً منجر به یافتن راهی برای حل مسئله می‌شود، را به دانش آموزان نمی‌داد. بنابراین، بیش از نیمی از دانش‌آموزان پایه نهم از مسیر درک اجمالی به این فعالیت پاسخ دادند. دانش‌آموزان در پایه‌های بالاتر، ازآنجایی‌که با استدلال هندسی آشنایی بیشتری پیداکرده بودند، در مقایسه با دانش‌آموزان پایهٔ نهم، از مسیر درک اجمالی، کمتر استفاده کردند. بااین‌حال در مسیر درک اجمالی به همراه استدلال، دانش‌آموزان هر سه‌پایه برخلاف فعالیت اول، با اختلاف کم، با استفاده از مفهوم مساحت و به‌کارگیری ابزار اندازه‌گیری، به فعالیت پاسخ دادند. به نظر می‌رسد وجود صفحه شطرنجی، دانش‌آموزان را در بهره‌مندی از نقش توصیفی شکل و محاسبه مساحت، ترغیب کرده بود.

در به‌کارگیری درک عاملی برای انجام فعالیت ۲ در راستای پژوهش‌های قبلی (مانند، میشل- کریسانسو و گاگاتسیس، ۲۰۱۳؛ کارپوز و اتاسوی، ۲۰۱۹) تدریس معمول هندسه، در مسیر گذر از دورهٔ اول به دورهٔ دوم متوسطه، به دانش‌آموزان در جهت غلبه بر مسیر درک طبیعی نگاه‌کردن به شکل هندسی، به سمت استفاده رهیافتی از آن، کمک زیادی ننموده بود. نکته قابل‌توجه این است که دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم که برای انجام فعالیت‌های هندسه در این سال‌ها، با توجه به محتوای کتاب‌های درسی‌شان و تحت تأثیر آموزش هندسه، بیشتر از درک استدلالی استفاده کرده بودند و با

درک عاملی به‌عنوان یک مسیر قابل‌اطمینان برای اثبات، به‌اندازه کافی آشنا نبودند، علاوه بر دوباره شکل‌بندی شکل داده‌شده، با به‌کارگیری درک استدلالی به محاسبه مساحت، نیز پرداختند. شایان ذکر است این اتفاق در پایهٔ نهم به‌ندرت رخ‌داده بود و دانش‌آموزان این پایه به نسبت دانش‌آموزان در پایه‌های دهم و یازدهم، با اعتماد بیشتری که به بهره‌گیری از نقش رهیافتی شکل هندسی داشتند از رویکرد دیگری برای پاسخ‌گویی استفاده نکردند.

بیشتر دانش‌آموزانی که در فعالیت ۱ به دنبال اطلاعات دقیق در بیان مسئله بودند و به داده‌های شکلی برای پاسخ‌گویی به فعالیت، اکتفا نکردند در سؤال ۲ باوجود طبیعت شئ مانند شکل، مشاهده شد با به‌کارگیری استدلال، اطلاعات مورد نیاز را از شکل استخراج کرده و به مسئله پاسخ دادند. اگرچه هیچ‌یک از دانش‌آموزان پایهٔ نهم نیازمند اطلاعات بیشتر، برای دوباره شکل‌بندی شکل داده‌شده، نبودند، تعدادی از دانش‌آموزان پایه‌های دهم و یازدهم، با بیان اینکه در مورد تساوی کمان‌های موجود در شکل یا میزان فرورفتگی و برآمدگی شکل سمت راست در فعالیت، اطمینان کافی ندارند، ادعا کردند با شرط داشتن اطلاعات بیشتر، می پذیرند، هر دو شکل داده‌شده مساحت‌های برابر خواهند داشت. شاید ترسیم شکل‌ها بر روی صفحه شطرنجی، نبود اطلاعات لازم در صورت‌مسئله را تا حدودی جبران و به دانش‌آموزان کمک کرده بود از نقش رهیافتی و یا نقش توصیفی شکل، بهرهٔ لازم را ببرند.

از نتایج این مطالعه آشکار می‌شود تدریس هندسه می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا از مسیر درک طبیعی نگاه‌کردن به شکل هندسی به مسیر درک استدلالی ارتقا یابند. بنابراین، می‌توان با سازمان‌دهی تکالیف متنوع هندسی، برخوردار از شکل‌ها با نقش‌ها و طبیعت‌های متفاوت، در کتاب‌های درسی، به دانش‌آموزان کمک کرد تا با بازنمایی‌های مختلف در هندسه آشنا شده و با کسب تجربه از طریق انجام فعالیت‌های هندسی، مانند خبرگان با الهام از این فضای بازنمایی با به‌کارگیری استدلال به انجام فعالیت در فضای هندسی بپردازند. آشنایی معلمان از وجود درک‌های مختلف شناختی دانش‌آموزان حین نگاه‌کردن به شکل هندسی، بسیار ضروری است (گال، ۲۰۱۹). برگزاری دوره‌های تخصصی هندسه به معلمان کمک می‌کند تا با انواع بازنمایی‌های ذهنی دانش‌آموزان در مواجهه با شکل، حین انجام فعالیت هندسی، آشنا شوند و در این مسیر به آنان کمک

کنند تا بین مسیر درک طبیعی و درک ریاضیاتی نگاه‌کردن به شکل هندسی پیوند برقرار کنند. محدودیت‌هایی در انجام این تحقیق وجود داشت که محققان هنگام پژوهش از آن‌ها آگاه بودند. فعالیت‌های بررسی‌شده در این مطالعه، برگرفته از یک آزمون گسترده‌تر بود، بنابراین، به دلیل طولانی‌بودن فرایند برگزاری آزمون تشریحی، تأثیر عواملی نظیر خستگی را نمی‌توان در روند پاسخ‌گویی دانش‌آموزان به فعالیت‌ها، بی‌اثر دانست. از سوی دیگر، در فرایند انتخاب کلاس‌ها برای برگزاری آزمون با توجه به محدودیت زمان و تأکید محقق بر حضور داشتن حین اجرای پژوهش، نمونه‌ها به روش در دسترس انتخاب شدند. بنابراین، تعمیم نتایج آن با محدودیت مواجه است.

منابع

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی (۱۳۹٦). *ریاضی پایهٔ نهم دورهٔ اول متوسطه*. چاپ ششم تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی (۱۳۹۷). *هندسهٔ (۱) پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه*. چاپ پنجم، تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

ظهوری زنگنه، بیژن (۱۳۸٤). هندسهٔ خط و صفحه در ریاضیات مدرسه ای. *رشد آموزش ریاضی*، ۲۲(۸۰)، ٤-۱۱.

Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches* (4th Ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Cuoco, A. A., & Curcio, F. R. (Eds.). (2001). *The roles of representation in school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In R. Sutherland and J. Mason (Eds.) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education: NATO ASI Series* (Vol. 138, pp. 142-157). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, 37-52.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt and M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 3-27). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Mathematical Behavior*, 17(1), 105-121.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24(2), 139-162.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2004). The effects of different modes of representations on mathematical problem solving. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp.447-454). Bergen, Norway: Bergen University College.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., Panaoura, A., & Philippou, A. (2010). One way of assessing the understanding of a geometrical figure. *Acta Didactica Universitaties Comenianae Matematics,* 10, 33-50.

Gal, H. (2019). When the use of cognitive conflict is ineffective-problematic learning situations in geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 102(2), 239-256.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, and B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397–430). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Hershkowitz, R., Duval, R., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Lehrer, R., Romberg, T., Berthelot, R., Salin, M. H. & Jones, K. (1998) Reasoning in Geometry. In C. Mammana and V. Villani (Eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: New ICMI Study Series* (Vol. 5, pp. 29-83) Dordrecht, Springer.

Jones, K. (1998), Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1&2), 29-34.

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In Haggarty, L. (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: Perspectives on practice* (pp. 121-139). London, UK: Routledge Falmer.

Karpuz, Y., & Atasoy, E. (2019). Investigation of 9th-grade students' geometrical figure apprehension. *European Journal of Educational Research*, *8*(1), 285-300.

Kastberg, S. E. (2002). *Understanding mathematical concepts: the case of the logarithmic function*. (Doctoral Dissertation). University of Georgia, Athens.

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, and O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 159–179). Berlin, Heidelberg: Springer.

Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 33(1), 159-174.

Mariotti M. A. (1995). Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In R. Sutherland and J. Mason (Eds.) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education: NATO ASI Series* (Vol. 138, pp. 97-116). Berlin, Heidelberg: Springer.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.

Michael– Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2013). Geometrical figures in geometrical task solving: an obstacle or a heuristic tool. *Acta Didactica Universitatis Comenianae–Mathematics*, 13, 17-30.

Michael– Chrysanthou, P., & Gagatsis, A., Avgerinos, E., & Kuzniak, A. (2011). Middle and High school students' operative apprehension of geometrical figures. *Acta Didactica Universitatis Comenianae–Mathematics*, 11, 45-55.

Michael, P. M. (2013). *Geometrical figure apprehension: cognitive processes and structure* doctoral Dissertation, University of Cyprus.

Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2014). Ambiguity in the way of looking at geometrical figures. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 17(4), 165-179.

Miller, A. (1999). Einstein, Poincaré, and the testability of geometry. In J. Grey (Ed), *The*

Symbolic Universe: Geometry and Physics 1890-1930 (pp. 47-57). Oxford University Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. reston. VA: NCTM.

Selling, S. K. (2015). Learning to represent, representing to learn. *Mathematical Behavior,* 41, 191-209.

Sharygin, I., & Protasov, V. (2004, July). Does the school of the 21st century need geometry? In V. Sadovnichii (Ed), *The 10th International Congress on Mathematical Education: National Presentation: Russia* (pp. 167-177). Moscow, Russia: Institute of New Technology.

Van Hiele, P. M. (1985). The child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds), English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele (pp. 243-252). *Brooklyn*, NY: Brooklyn College.